Journal of Securities Exchange

Securities & Exchange Organization, Research, Development & Islamic Studies (RDIS)
Journal of Securities and Exchange, Fall 2022, V. 15, No.59, pp. 441-470

Multi-Objective Portfolio Optimization Model with Fuzzy-Robust Hybrid Approach

(As a case: Tehran Stock Exchange)[1]

Mahsa Jaberi[2], Emran Mohammadi[3]*, Amir Azizi[4]

Received: 2022/03/12
Accepted: 2022/08/04

Research Paper

Abstract

The novel theory of the portfolio optimization has developed based on the fundamental Markowitz model. The Markowitz model is unique in terms of theory, but its weaknesses prevent the use of this model in practice. In this model, the return rate is extracted based on past data, but in this research, future scenarios related to return rates has been used in the investment process. The Markowitz model and its subsequent generalizations are multi-objective. In this study, from the development approach of Zimmermann's multi-objective optimization approach, that has fuzzy like structure, has been used. Also, for confront with the uncertainties from a robust optimization approach based on minimization of regret, has been used. In other words, first describe Zimmermann's model by considering the scenarios and specific weighting combinations, for the two purposes of minimizing risk and maximizing return, and then the minimax regret solution has been calculated with respect to the considered scenarios and weighted combinations. In the end of this paper, in order to evaluate the performance and validation of the proposed model, it has been implemented in Tehran Stock Exchange.

Key Words: Portfolio, Multi-Objective Optimization, Zimmermann Fuzzy Approach, Minimax Regret, Robustness.
JEL Classification: C61, G11

---

1. DOI: 10.22034/JSE.2020.11352.1532

2. M. Sc. Department of Industrial Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

3. Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Science & Technology University, Tehran, Iran. (Corresponding Author). (E_Mohammadi@iust.ac.ir).

4. Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

فصلنامه بورس اوراق بهادار

سازمان بورس و اوراق بهادار
مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

سازمان بورس و اوراق بهادار، مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

فصلنامه بورس اوراق بهادار، سال پانزدهم، شماره ۵۹، پاییز ۱۴۰۱، صص ۴۷۰-۴۴۱

مدل بهینه‌سازی چند هدفه سبد سهام با رویکرد ترکیبی فازی- استوار (مورد مطالعه: بورس اوراق بهادار تهران)[۱]

مهسا جابری[۲]، عمران محمدی[۳]، امیرعزیزی[۴]

مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۱۳

چکیده

تئوری نوین بهینه‌سازی سبد سهام استوار بر مدل بنیادین مارکویتز توسعه یافته است. مدل مارکویتز از نظر تئوری، ویژگی‌های منحصر به فردی دارد، اما ضعف‌های آن مانع استفاده از این مدل در عمل می‌شود. در این مدل عموما نرخ بازده بر اساس داده‌های گذشته استخراج می‌شود، اما دراین پژوهش از سناریوهای آتی مربوط به نرخ بازده، در فرآیند سرمایه‌گذاری استفاده شده است. مدل مارکویتز و تعمیم‌های بعدی آن چند هدفه هستند. در این پژوهش از توسعه رویکرد بهینه‌سازی چند هدفه زیمرمن که ساختاری فازی‌مانند دارد، استفاده شده است. همچنین برای روبرویی با عدم قطعیت‌ها از رویکرد بهینه‌سازی استوار بر به حداقل رساندن تأسف، استفاده شده است. به عبارتی دیگر ابتدا مدل زیمرمن را با در نظر گرفتن سناریوها و ترکیب‌های وزنی ویژه، برای دو هدف حداقل کردن ریسک و حداکثر کردن بازده، تشریح کرده و مرز پارتو را به دست آورده، سپس راه‌حل تأسف مینی‌ماکس را با توجه به سناریوها و ترکیب‌های وزنی منظور شده، محاسبه شده است. در نهایت، به منظور ارزیابی عملکرد و اعتبارسنجی مدل ارائه شده، اقدام به پیاده‌سازی آن در بورس اوراق بهادار تهران شده است.

واژه های کلیدی: سبد سهام، بهینه‌سازی چند هدفه، رویکرد فازی زیمرمن، تأسف مینی‌ماکس، استواری.

طبقه بندی موضوعی: C61, G11

---

۱. DOI: 10.22034/JSE.2020.11352.1532
۲. کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
۳. استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران. (نویسنده مسئول).
۴. استادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

مقدمه

در سالیان اخیر تلاش‌هایی برای هدایت سرمایه‌گذاران صورت گرفته و مدل‌هایی ارائه شده است. در این بین، مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام به مثابه ابزاری در راستای بهبود تصمیم‌ها، درآمده است. بنابراین، مسئله انتخاب و بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به عنوان یکی از مسائل مهم در حوزه مهندسی مالی مطرح شده است.

بهینه‌سازی چندهدفه از جمله مباحث بسیار مهم در حوزه تصمیم‌گیری و پژوهش در عملیات است. دلیل اهمیت موضوع نیز این است که مسائل دنیای واقعی دارای بیش از یک هدف هستند و این اهداف نیز در بیشتر موارد در تعارض با هم قرار دارند. به همین جهت در دست داشتن رویکردهای مناسب ریاضی برای تحلیل مسائل چند هدفه الزامی است. در تفکر کلاسیک تصمیم‌گیرنده برای تصمیم‌گیری به آگاهی عمیق و همه جانبه از شرایط موجود نیازمند است، اما با توجه به اینکه ما در جهانی پویا و غیر قطعی زندگی می‌کنیم، به دست آوردن اطلاعات کامل و قطعی کمابیش غیر ممکن است که با ظهور رویکردهایی مانند فازی و استوار این مشکل تا حد زیادی مرتفع شد، همچنین با توجه به اینکه در مسائل چند هدفه تنها یک پاسخ وجود ندارد و مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه در جبهه پارتو به دست می‌آید، استفاده از این رویکردها برای انتخاب بهترین جواب در مجموعه بهینه پارتو بسیار کاربردی است.

در گستره انتخاب سبد سهام بهینه، دو مولفه مهم برای تصمیم‌گیری، میزان ریسک و بازده دارایی‌های سرمایه‌ای است، به طوری که انتخاب مجموعه دارایی‌های بهینه بیشتر با تبادل بین ریسک و بازده صورت می‌گیرد و هر چه ریسک مجموعه دارایی‌ها بیشتر باشد، سرمایه‌گذاران انتظار دریافت بازده بالاتری را خواهند داشت، بنابراین شناسایی مرز کارای مربوط به سبد دارایی‌ها این امکان را به سرمایه‌گذاران می‌دهد که بر اساس تابع مطلوبیت و درجه ریسک‌گریزی و ریسک‌پذیری خود، بیشترین بازده مورد انتظار از سرمایه‌گذاری خود را به دست آورند.

یکی از اصلی‌ترین کارها در زمینه بهینه‌سازی سبد سهام، مدل میانگین - واریانس که توسط مارکویتز ارائه شده است، به طوری که موجب ایجاد انقلابی در مسائل انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام شد(مارکویتز[1]،۱۹۵۲). مدل مارکویتز از دیدگاه تئوری، ویژگی‌های ویژه‌ای دارد، اما

1. Markowitz

ضعف‌های آن مانع استفاده از این مدل در عمل می‌شود. در این مدل کلاسیک فرض می‌شود که سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز و بازده دارایی‌ها از توزیع نرمال برخوردار هستند، به طوری که مقادیر آنها بیشتر از داده‌های گذشته به دست می‌آید، در این صورت اعتماد کمی بر صحت نقاط تخمین زده شده وجود دارد و احتمال اینکه این تخمین‌ها با داده‌های آینده همپوشانی داشته باشد، کم است، پس این پژوهش به ایجاد یک رویکرد ترکیبی فازی – استوار که یک روشی جدید درحل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه سبد سهام است، می‌پردازد و از سناریوهای بازده آتی در فرآیند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری استفاده می‌کند تا خطای نقاط تخمین زده شده کاهش یابد. به عبارتی این پژوهش از مدل برنامه‌ریزی خطی فازی زیمرمن و تعمیم آن، به عنوان روشی برای حل مسائل بهینه سازی چند هدفه استفاده می‌کند و با استفاده از ترکیب‌های وزنی ویژه مرز پارتو را برای هر سناریو به دست می‌آورد و از رویکرد تأسف مینی‌ماکس[1] که به عنوان روشی برای حل مسائل بهینه سازی استوار مطرح شده است، در راستای انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام بهره می‌گیرد.

در روش زیمرمن توابع هدف اصلی به عنوان یک آرمان فازی به مجموعه محدودیت‌ها اضافه می‌شوند و سپس چالش برنامه‌ریزی خطی متناظر، با یک تابع هدف جدید حل می‌شود(زیمرمن[2]، ۱۹۷۸). در رویکرد تأسف مینی‌ماکس، تأسف به عنوان ملاک در نظرگرفته می‌شود که آن انحراف هر راه‌حل از بهترین راه‌حل ممکن، در هر سناریو تعریف می‌شود. در واقع هدف این رویکرد انتخاب راه حلی است که تحت بدترین شرایط منجر به حالت بهینه سناریو می‌شود(زیدوناس[3] و همکاران، ۲۰۱۷).

با توجه به اینکه در رویکردهای سنتی تنها یک سناریو در نظر گرفته می‌شود و میزان تأسف حاصل از سرمایه‌گذاری و کمینه کردن آن را در نظر نمی‌گیرند، پژوهش حاضر تلاش دارد که با در نظرگرفتن سناریوهای مختلف در فرآیند مدلسازی، ضمن بیشینه کردن بازده سبد سهام و کمینه کردن ریسک سرمایه‌گذاری، تأسف سرمایه‌گذار را نیز کاهش دهد، بنابراین درصدد پاسخ به این پرسش است که آیا مدل پیشنهادی، تأسف سرمایه‌گذار را به حداقل مقدار ممکن می‌رساند و در مقایسه با رویکردهای سنتی بهتر عمل می‌کند؟ که پس از پیاده‌سازی مدل و تجزیه و تحلیل آن، به این پرسش پاسخ داده خواهد شد.

---

۱. Minimax Regret

2. Zimmermann

3. Xidonas

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

چارچوب روش کلاسیکی که توسط مارکویتز ارائه شد، روی بیشتر مدل‌های مالی طراحی شده برای حل مسئله انتخاب سبد سهام تأثیر بسزایی گذاشته است. سرمایه‌گذاران، بر پایه معیارهای بازده و ریسک، به دنبال به حداقل رساندن ریسک سبد سهام برای برخی از سطوح بازده مورد انتظار هستند(مارکویتز، ۱۹۵۲). فرضیه اساسی برای کارکردن این روشِ دوهدفیِ کلاسیک، عبارت‌اند از درستی تخمین‌های بازده و ماتریس‌های کواریانس. داده‌های پرت می‌تواند تأثیر چشمگیری روی مقیاس کواریانس معمولی داشته باشند که هو [1] و همکارانش یک معیار کواریانس استوار برمبنای میانه را با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای حل این مشکل در راستای بهینه‌سازی استوار سبد سهام ارائه می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش سود سرمایه‌گذاری با جایگزین کردن معیارهای استوار از جمله کواریانس استوار به جای روش‌های مرسوم اندازه‌گیری محقق می‌شود که نسبت به داده‌های پرت حساس نیستند (هو و همکاران، ۲۰۱۲). بهینه‌سازی سبد سهام با روش حداقل واریانس جهانی، تحت تأثیر پارامتر عدم قطعیت که مولفه مهمی از مدل ریسک است، قرار دارد. لذا مایلت [2] و همکارانش یک رویکرد استوار بر رگرسیون استوار با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای حل مسئله بهینه‌سازی سبد سهام ارائه می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که سبد سهام استوار با استفاده از مدل پیشنهادی، واریانس کمتر و نسبت شارپ بیشتری نسبت به راهبرد حداقل واریانس جهانی دارد(مایلت و همکاران، ۲۰۱۵). از آنجایی که رویکردهای استوار درک محدودی از سبد سرمایه‌گذاری دارند، از این روش‌ها به طور گسترده مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، بنابراین نیاز به تحلیل رفتار سبد سرمایه‌گذاری بسیار دارای اهمیت است که کیم [3] و گروهش برای تعیین این موضوع که سبد سهام استوار، بیشتر به فاکتورها وابسته هستند یا به حرکت‌های دارایی فردی و اینکه فاکتورهای اساسی کدام موارد هستند، با به‌کارگیری راهبرد حداقل واریانس جهانی، توضیح دادند. افزون بر این در مطالعه‌ای در مورد مولفه‌های سبد سرمایه‌گذاری استوار، خصوصیات دارایی‌های انتخاب شده و مشخص کردن حساسیت آنها نسبت به ورود خطاهای تخمینی و تحلیل رگرسیونی برای بررسی همبستگی بین بازده سبد سهام و عوامل اساسی با استفاده از مدل چهار عاملی فاما–فرنچ، مورد بررسی قرار دادند(کیم و همکاران، ۲۰۱۳). آنها یک مدلسازی استوار با بهره‌گیری از رویکرد بدترین حالت (مینی‌ماکس) را پیشنهاد کردند که امکان کنترل میزان در معرض

---

1. Huo
2. Maillet
3. Kim

قرار گرفتن سبد سهام در یک فاکتور را فراهم می‌آورد، همچنین توسعه‌ها و پیشرفت‌های بهینه‌سازی بدترین نمونه استوار را که شامل همتایان استوار ارزش در معرض ریسک و مسائل ارزش در معرض ریسک شرطی بودند مورد نظرسنجی قرار دادند و به بحث در مورد کارایی بهینه‌سازی استوار پرداخته و به طور ویژه، بر روی بدترین بازده‌های بازار تمرکز کردند(کیم و همکاران، ۲۰۱۴). در زمینه بهینه‌سازی چند هدفه استوار، فلیج و ورنر[1] تلاش‌هایی را درخصوص تعیین مشخصات موقعیت جبهه پارتوی استوار نسبت به جبهه پارتوی اصلی وابسته با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی چند هدفی استاندارد، انجام داده‌اند. آنها چالش بهینه‌سازی استوار چند هدفه محدب در شرایط عدم قطعیت داده‌ها و مشخص کردن مرز کارآمد را دنبال کرده‌اند(فلیج و ورنر، ۲۰۱۴). انتخاب سبد سهام بهینه به سرمایه‌گذاران برای کسب سود آوری بیشتر کمک می‌کند، ولی وجود اطلاعات فراوان و عوامل تاثیرگذار متعدد، تصمیم‌گیری فردی برای انتخاب سبد سهام مناسب را به موضوعی سخت مبدل ساخته است، بنابراین پاتاری[2] و همکارانش کارایی چهار روش تصمیم‌گیری چند معیاره برای انتخاب بهترین سبد سهام را با توجه به معیارهای سرمایه‌گذار تحلیل می‌کنند. نتایج نشان می‌دهد که یک سرمایه‌گذار می‌تواند از ترکیب معیارهای تصمیم‌گیری و تبدیل کردن آن به یک معیار سود ببرد، همچنین اضافه کردن یک شاخص شتاب به معیارهای ارزش، عملکرد سبد سهام‌های ترکیبی را افزایش می‌دهد(پاتاری و همکاران، ۲۰۱۸). آخرین پیشرفت‌ها در زمینه بهینه‌سازی استوار در مدیریت سرمایه‌گذاری، دامنه وسیعی از مشکلات از جمله مدیریت دارایی و بدهی و مشتقات قیمت‌گذاری و انواع رده‌های دارایی از‌جمله بازار اوراق قرضه و ارز را در برمی‌گیرد که در مقاله کیم و همکارانش مروری بر چگونگی بهینه‌سازی استوار در مدیریت سرمایه‌گذاری صورت گرفته است که از رویکرد بدترین حالت (مینی‌ماکس) برای بهینه‌سازی بهره برده است(کیم و همکاران، ۲۰۱۸). در مسائل بهینه‌سازی راه‌حل‌های بهینه بیشتر محدود هستند، زیرا اغتشاشات یا تغییرات داده‌های ورودی ممکن است کیفیت یک راه‌حل بهینه را کاهش داده یا حتی آن را غیرعملی کند که اهرگات[3] و همکارانش یک راه‌حل مینی‌ماکس استوار برای حل این مشکل ارائه کردند که نتایج نشان داد که راه‌حل‌های کارآمد استوار می‌توانند به طور اساسی در هر جایی در مجموعه‌های غیرقطعی، حتی برای مسائل بهینه‌سازی خطی چند هدفه نامعین، قرار گیرند(اهرگات و همکاران، ۲۰۱۴). همچنین مدل ارائه شده توسط لی[4] و همکارانش با

1. Fliege & Werner
2. Patari
3. Ehrgott
4. Li

هدف حداقل کردن فاصله و حداکثر بازده مورد انتظار و بازده به دست آمده هر سبد سهام، به منظور انتخاب سبد سهام بهینه، توسط روش به حداقل رساندن پشیمانی انجام شده است که میزان تأسف مورد انتظار در سرمایه‌گذاری را به طور متوسط کاهش می‌دهد و برای به دست آوردن سرمایه‌گذاری توزیعی سودمند است(لی و همکاران، ۲۰۱۲). در مقاله لیم [۱] و همکارانش نیز یک مدل انتخاب سبد سهام تک دوره‌ای در شرایط عدم قطعیت پارامترها با هدف به حداقل رساندن پشیمانی با استفاده از قضایای دوگانگی محدب ارائه شده است(لیم و همکاران، ۲۰۱۲). به دلیل داده‌های تاریخی اندکی که می‌توان در بازار بورس اوراق بهادار به دست آورد، نمی توان بازده، ریسک و نقدینگی آینده اوراق بهاداررا با دقت پیش بینی کرد. محیط سرمایه‌گذاری بیشتر مبهم و نامشخص است، بنابراین برای حل این مشکل، لیو و ژانگ [۲] یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام بهینه در یک محیط فازی، از طریق گنجاندن ریسک بازار و ریسک نقدینگی در مسئله انتخاب سبد سهام فازی، با استفاده از برنامه‌ریزی هدف فازی و الگوریتم ژنتیک فازی را مطرح کردند(لیو و ژانگ، ۲۰۱۳). متاکسیوتیس و لیاگ کوراس [۳] یک الگوریتم جدید برای رسیدگی به پیچیدگی‌های مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری فازی میانگین–واریانس با هزینه‌های معامله ارائه می‌کنند(متاکسیوتیس و لیاگ کوراس، ۲۰۱۸). همچنین لوین [۴] و همکارانش الگوریتمی طراحی کرده‌اند که به حل مسائل چالش برانگیز و غیرقابل حل بهینه‌سازی سبد سهام‌هایی که در چارچوب میانگین–واریانس مدلسازی شده‌اند، به ارائه شش محدودیت کاربردی در سناریوهای تجاری واقعی می‌پردازند. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی از دیدگاه کیفیت راه‌حل و زمان محاسبات، بسیار سریع عمل می‌کند و قادر به حل مسائل پیچیده بهینه‌سازی سبد سهام، بدون ساده‌سازی است(لوین و همکاران، ۲۰۱۷). راهبردهای متفاوتی برای تصمیم گیری‌های سرمایه‌گذاری و انتخاب سبد سهام بهینه در یک محیط رقابتی وجود دارد که دی [۵] و همکارانش مدلی برای انتخاب بهترین سبد سهام با برنامه‌ریزی هدف فازی و استفاده از معیارهای ریسک و بازده و نقدینگی و انحراف معیار نیمه مطلق ارائه می کنند. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی، سبد سهام بهینه را با درنظر گرفتن بالاترین سطح مشترک موفقیت هر سه معیار، مشخص می کند، به صورتی که با افزایش تابع عضویت، ارزش سود سبد سهام انتخابی نیز افزایش می‌یابد و همچنین ریسک کمتر نشان‌دهنده ارزش بالاتر در تابع عضویت وابسته است(دی و همکاران، ۲۰۱۸). یک مشکل اساسی مدل

1. Lim
2. Liu & Zhang
3. Metaxiotis & Liagkouras
4. Lwin
5. De

میانگین–واریانس مارکویتز، طبیعت تک دوره‌ای بودن آن است، بنابراین انتخاب بهینه طول افق زمانی می‌تواند منجر به تصمیم‌های بهینه برای سرمایه‌گذاری شود، پس فرمولاسیون‌های بهینه‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای با محدودیت‌های معاملاتی اضافی در مقاله برتسیماس و پاچامانوا[1] ارائه شدند. آنها به این نتیجه رسیدند که رویکردهای بهینه‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای استوار، جایگزین خوبی برای مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام تک دوره‌ای هستند(برتسیماس و پاچامانوا، ۲۰۰۸). اگرچه هدف بهینه‌سازی سبد سهام، محافظت از سبد سهام در برابر عدم قطعیت است، گریگوری[2] و همکارانش محاسبه کردند که آن با هزینه‌هایی در زمینه بازده همراه است. آنها بهینه‌سازی سبد سهام را از طریق ارزیابی هزینه استواری در بازده دارایی‌ها، با استفاده از روش مینیمم کردن تأسف و به کارگیری مدل همبستگی، مورد بررسی قرار دادند که نتایج آن موجب انتخاب سبد سهام بهینه و متنوعی از نظر تعداد دارایی و وزن دارایی‌ها شد(گریگوری و همکاران، ۲۰۱۱). زیدوناس و همکارانش مدلی برای بهینه‌سازی چند هدفه سبد سهام ارائه کردند، به طوری که از رویکرد استوار تأسف مینی‌ماکس بهره بردند، نتایج به دست آمده از پژوهش آنها کاملا معنادار هستند، زیرا مناطقی از جبهه پارتو را پیشنهاد می‌کنند که استوارتر هستند(زیدوناس و همکاران، ۲۰۱۷). در نهایت، لازم به بیان است که در اینجا از رویکرد تأسف مینی‌ماکس مقاله زیدوناس و همکاران و همچنین رویکرد فازی زیمرمن، در راستای بهینه‌سازی سبد سهام، استفاده شده است.

روش اجرای پژوهش

پژوهش حاضر با توجه به اهدافی که دنبال می‌کند، جزء پژوهش‌های کاربردی بوده و از نظر فرآیند گردآوری داده از نوع پژوهش‌های پس رویدادی است، یعنی بر پایه تجزیه و تحلیل اطلاعات گذشته و تاریخی انجام گرفته است. جامعه آماری پژوهش حاضر شامل شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران است.

این مقاله، به ارائه یک مدل با رویکرد ترکیبی فازی – استوار که یک روش جدید در مسائل بهینه‌سازی چند هدفه سبد سهام است، می‌پردازد. به عبارتی از روش به حداقل رساندن تأسف که رویکردی استوار مطرح شده است، استفاده کرده و از رویکرد فازی زیمرمن که به عنوان روشی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند هدفه درنظرگرفته شده است، بهره می‌برد، به طوری

---

1. Bertsimas & Pachamanova
2. Gregory

که با استفاده از سناریوهای مختلف و ترکیب‌های وزنی ویژه برای توابع هدف وابسته، به دنبال ساخت مرزهای کارا و استوار در جبهه پارتو است، یعنی مجموعه سبد سهام‌های که به حالت بهینه نزدیک هستند و به عبارتی بیشترین بازدهی و کمترین ریسک را دارند. در نهایت سبد سهامی انتخاب می‌شود که تأسف سرمایه‌گذار را به حداقل می‌رساند.

در این بخش ابتدا اندیس‌ها، مجموعه‌ها، اسکالرها، پارامترها و متغیرها مشخص شده و در ادامه به معرفی و تشریح مدل نهایی پژوهش پرداخته شده است.

اندیس‌ها و مجموعه‌ها

- i : سهام شرکت‌های فعال در بورس اوراق بهادار تهران؛
- t : دوره‌های زمانی؛
- s : سناریوها؛
- g : ترکیب‌های وزنی مشخص شده.

اسکالرها

- Z_1^* : جواب بهینه تابع هدف اول (ریسک)؛
- Z_2^* : جواب بهینه تابع هدف دوم (بازده)؛
- Z_1' : بدترین جواب تابع هدف اول (ریسک)؛
- Z_2' : بدترین جواب تابع هدف دوم (بازده)؛
- w_1^g : وزن اختصاص داده شده به تابع هدف اول (ریسک)؛
- w_2^g : وزن اختصاص داده شده به تابع هدف دوم (بازده).

پارامترها

- R_{it} : بازده سهام i ام در دوره زمانی t ام؛
- $\bar{R}_i$: میانگین بازده سهام i ام (برای هر سناریو جداگانه محاسبه می‌شود).

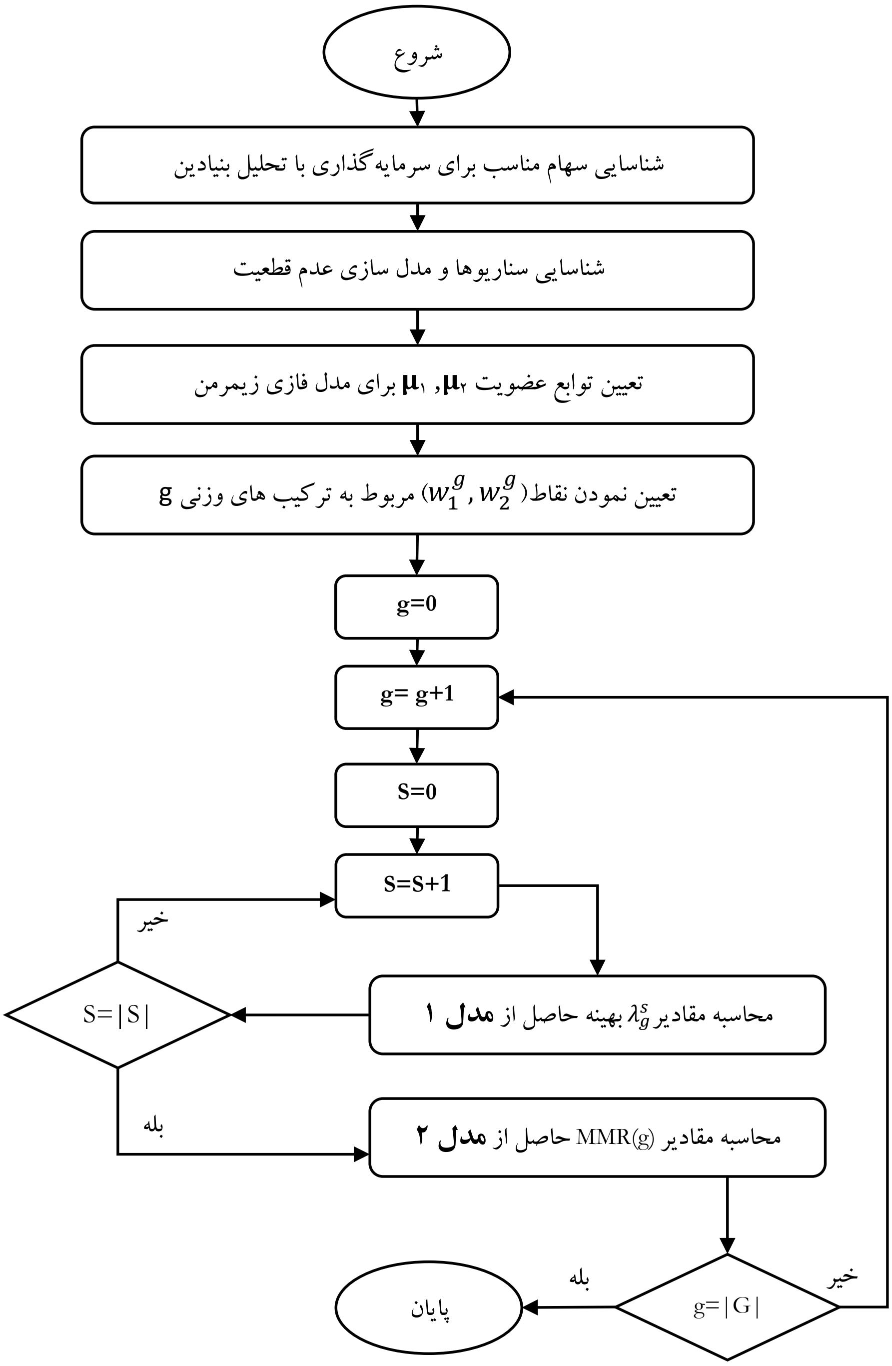
متغیرها

- Z_1 : تابع هدف مربوط به ریسک؛
- Z_2 : تابع هدف مربوط به بازده؛

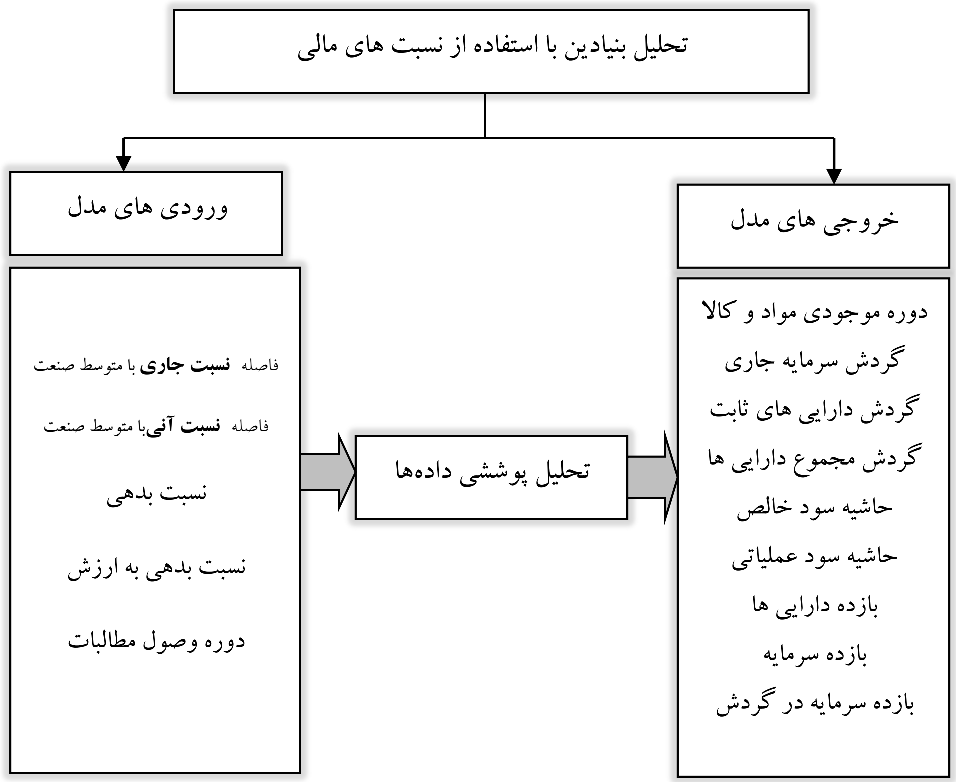
- $x(i)$: میزان سهام i ام در پورتفولیو؛
- Y_t : متغیر مثبت اضافی در تابع هدف ریسک که برای خطی کردن از آن استفاده می‌شود.
- μ_1 : مقادیر تابع عضویت مربوط به تابع هدف اول (ریسک)؛
- μ_2 : مقادیر تابع عضویت مربوط به تابع هدف دوم (بازده)؛
- λ_1 : مقادیر تابع هدف ریسک زیمرمن به ازای ترکیب وزنی g و سناریوی s؛
- λ_2 : مقادیر تابع هدف بازده زیمرمن به ازای ترکیب وزنی g و سناریوی s؛
- λ_g^s : جواب بهینه تابع هدف زیمرمن به ازای ترکیب وزنی g و سناریوی s؛
- MMR(g) : جواب بهینه تابع هدف تأسف مینی‌ماکس به ازای هر ترکیب وزنی g؛
- Y_g : متغیری که میزان تأسف مینی‌ماکس((MMR(g) نسبی را نشان می‌دهد.

در این پژوهش پس از شناسایی سهام دارای بنیاد مناسب برای تشکیل سبد سهام بهینه با استفاده از مدل مطرح شده در شرایط عدم قطعیت و مطرح بودن سناریوهای مختلف اقدام شده است. به منظور درک کامل مراحل حل مدل پژوهش، فلوچارت مدل در شکل ۱ آورده شده است.

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، نخستین مرحله پیشنهادی شناسایی سهام مناسب برای سرمایه‌گذاری با تحلیل بنیادین است. برای این منظور نسبت‌های مالی مستخرج از صورت‌های مالی، با استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها که در شکل ۲ نمایش داده شده است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. لازم به بیان است تمام نسبت‌های مالی که بیشتر بودن آنها مطلوب است به عنوان خروجی و تمام نسبت‌های مالی که کمتر بودن آنها مطلوب است به عنوان ورودی مدل تحلیل پوششی داده‌ها مد نظر قرار گرفته‌اند. تنها مورد استثناء نسبت‌های نقدینگی شامل نسبت جاری و نسبت آنی بوده اند که نه تنها کم بودن آنها نامطلوب است بلکه زیاد بودن آنها نیز می تواند نامطلوب باشد. بنابراین برای این دو نسبت، فاصله شان تا متوسط نسبت صنعت به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است.



شکل ۱. فلوچارت مدل پیشنهادی



شکل ۲. فرآیند تحلیل پوششی داده های پژوهش

مدل پژوهش دارای دو تابع هدف حداقل کردن ریسک و حداکثر کردن بازده است که با توجه به مقاله زیدوناس و همکارانش (۲۰۱۷)، برای N دارایی و T دوره تاریخی، دو تابع هدف ریسک و بازده به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند:

$$\min Z_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{N} x_i \left(R_{it} - \bar{R}_i\right) \right| \qquad (1)$$

$$\max Z_2 = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{R}_i$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

که در اینجا $\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_{it}$ است.

خطی بودن این مدل نسبت به تابع هدف ریسک، از طریق تبدیل‌های کونو و یامازاکی (۱۹۹۱) حفظ می‌شود. بر این اساس، از T متغیر پیوسته مثبت اضافی y_t برای نشان دادن انحراف مطلق از میانه هر یک از دوره‌ها استفاده می‌شود که در نهایت منجر به T * 2 محدودیت می‌شود، بنابراین تابع هدف ریسک به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\min Z_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t \qquad (۲)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \left(R_{it} - \bar{R}_i\right) + y_t \geq 0 \qquad , t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \left(R_{it} - \bar{R}_i\right) - y_t \leq 0 \qquad , t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

در ابتدا، برای به دست آوردن Payoff Table، باید بهترین و بدترین حالت را برای دو تابع هدف ریسک و بازده، با توجه به محدودیت‌های منظور شده، برای همه سناریوهای منظور شده، به دست آورد. پس باید هر کدام از این توابع هدف را جداگانه حل کرده و بهترین جواب‌ها و بدترین جواب‌ها را محاسبه کرد.

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می شود در فلوچارت پیشنهادی پژوهش جاری در برخی زیربخش‌ها از اصطلاح مدل ۱ و مدل ۲ استفاده شده است که در ادامه به تشریح این مدل‌ها می‌پردازیم.

۱- تشریح مدل ۱ پژوهش (مدل فازی زیمرمن)

زیمرمن نخستین بار از مجموعه‌های فازی در مسائل برنامه‌ریزی خطی استفاده کرد. وی مسائل برنامه‌ریزی خطی را با یک تابع هدف و محدودیت‌های فازی، مطالعه کرد. بر این اساس، روش برنامه‌ریزی خطی فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی تولید توسعه داده شد. او همچنین برای نخستین بار رویکرد برنامه‌ریزی خطی فازی خود را به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی چند

هدفه متعارف گسترش داد و فرض کرد که برای هریک از توابع هدف مسأله، تصمیم‌گیرنده یک هدف فازی دارد. همچنین، توابع هدف باید به ناچار کمتر یا برابر با مقدار ارزش انتظاری باشند. در مدل زیمرمن، یک تابع هدف با منطق بهینه‌سازی ماکس–مین، به جای دو تابع هدف معرفی می‌شود. در روش زیمرمن تابع هدف اصلی مسأله، cx، به عنوان یک آرمان فازی به مجموعه قیود اضافی می‌شود و مسأله برنامه‌ریزی خطی متناظر، با تابع هدف جدید λ حل می‌شود (زیمرمن، ۱۹۷۸). در ادامه رویکرد فازی زیمرمن به طور کامل تشریح می‌شود :

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر در نظر بگیرید.

$$\min Z = cx \qquad (۳)$$

$$s.t$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

ورژن فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی بالا به صورت زیر است:

$$cx \lesssim Z_0 \qquad (۴)$$
$$Ax \lesssim b$$
$$x \gtrsim 0$$

در اینجا Z_0 به معنای سطح تشخیص تصمیم‌گیرنده است.

برای بهبود نامساوی فازی، زیمرمن توابع عضویت خطی زیر را برای تابع هدف و محدودیت‌ها پیشنهاد کرد که تابع عضویت μ_i به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$Max\ Min\ \mu_i(Bx) \qquad (۵)$$

$$\mu_i(Bx)\begin{cases} 1 & ,(Bx)_i \le b_i' \\ 1-\dfrac{(Bx)_i-b_i'}{d_i} & ,b_i' \le (Bx)_i \le b_i'+d_i \\ 0 & ,(Bx)_i > b_i'+d_i \end{cases}$$

با جایگزینی $b_i'' = \frac{b_i'}{d_i}$ و $B_i' = \frac{B_i}{d_i}$ به عبارت زیر خواهیم رسید:

$$Max\ Min\ (b_i'' - (B'x)_i) \qquad (۶)$$

و در نهایت مسئله اصلی به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی و تک هدفه زیر تبدیل می‌شود:

$$Max\ \lambda \tag{۷}$$

$$s.t.$$

$$\lambda \le b_i'' - (B'x)_i \qquad , i = 0(1)m$$

$$x \ge 0$$

در این پژوهش بعد از به دست آوردن Payoff Table برای هر سناریو، با استفاده از رویکرد فازی زیمرمن که در مقاله زیمرمن به آن اشاره شده است، دو تابع هدف ریسک و بازده تبدیل به یک تابع هدف شده و مدل ۱ حل می‌شود:

همان‌طور که می‌دانیم در روش فازی زیمرمن، لازم است ابتدا توابع عضویت μ_i تعریف شوند که در مدل پژوهش، μ_1 (تابع عضویت مربوط به ریسک) و μ_2 (تابع عضویت مربوط به بازده) به صورت زیر تشریح شده‌اند:

$$Max\ Min\ \mu_i(Bx) =$$

$$Max\ Min\ (\mu_1, \mu_2) \tag{۸}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} 1 & , Z_1 \le Z_1^* \\ \dfrac{Z_1^- - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t}{Z_1^- - Z_1^*} & , Z_1^* \le Z_1 \le Z_1^- \\ 0 & , Z_1 > Z_1^- \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 1 & , Z_2 \le Z_2^- \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i \bar{R}_i - Z_2^-}{Z_2^* - Z_2^-} & , Z_2^- \le Z_2 \le Z_2^* \\ 0 & , Z_2 > Z_2^* \end{cases}$$

بعد از محاسبه و مشخص کردن بازه توابع عضویت μ_1 و μ_2، مدل نهایی زیمرمن(مدل ۱) با در نظر گرفتن محدودیت‌های مورد نظر توابع هدف، تشریح می‌شود، در این پژوهش ترکیب‌های وزنی ویژه w_1^g و w_2^g نیز به مدل زیمرمن اضافه شده که باعث تفکیک λ به λ_1 و λ_2 و تعمیم مدل زیمرمن به صورت زیر می‌شود :

$$\lambda_g^s = Max\ (w_1^g \lambda_1 + w_2^g \lambda_2) \tag{۹}$$

$$s.t.$$

$$\lambda_1 \leq \frac{Z_1^- - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t}{Z_1^- - Z_1^*}$$

$$\lambda_2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \bar{R}_i - Z_2^-}{Z_2^* - Z_2^-}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \left(R_{it} - \bar{R}_i\right) + y_t \geq 0 \qquad , t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \left(R_{it} - \bar{R}_i\right) - y_t \leq 0 \qquad , t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

در اینجا مدل نهایی زیرمرن برای همه ترکیب وزنی ویژه و همه سناریوهای مشخص شده، به طور جداگانه محاسبه می‌شود و در نهایت جواب‌های بهینه (λ_g^s) به دست خواهد آمد.

۲- تشریح مدل ۲ پژوهش (مدل تأسف مینی‌ماکس)

معیار تأسف مینی‌ماکس در فرمولاسیون‌های برنامه‌ریزی ریاضیات نیز معرفی شده است. به منظور بیان این مفهوم در مسائلی که در آنها چندین سناریو برای پارامترهای مدل وجود دارند، فرمولاسیون‌های ویژه‌ای توسعه داده شده‌اند. در مقاله هوسر[1] و همکارانش یک تابع پشیمانی به صورت تابعی در نظر گرفته شده است که تفاوت بین کارایی راه‌حل‌های دارای مزیت ادراک یا فاقد آن را اندازه‌گیری می‌کند(هوسر و همکاران، ۲۰۱۳). اگر x را به عنوان یک بردار تصمیم‌گیری در نظر بگیریم و s بردار مقادیر پارمترهای محقق شده (سناریو) باشد، آن‌گاه مقدار تأسف متناسب با متغیر تصمیم x و با در نظر گرفتن راه‌حل بهینه مربوط به سناریوی s (یعنی x*(s)) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(x,s) = f\left(x^*(s), s\right) - f(x,s) \qquad (۱۰)$$

لازم به بیان است که این تابع با توجه به اینکه از قبل بدانیم کدام سناریو اتفاق خواهد افتاد، قابل حل خواهد بود. بدون داشتن این دانش پیشین باید از راه‌حل تأسف مینی‌ماکس استفاده

1. Houser

کرد. بنابراین در این راستا کولیس و یو در سال ۱۹۹۷ از مفهوم «تأسف» برای تشخیص راه‌حل‌های استوار در مسائل بهینه‌سازی استفاده کردند و تابعی را برای راه‌حل تأسف مینی‌ماکس مطرح کردند که به صورت زیر است:

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = f(x) \tag{۱۱}$$

$$s.t.$$
$$x \in F$$

بر پایه فرمولاسیون بالا، تابع هدفی که باید به حداکثر برسد، ترکیبی از متغیر تصمیم‌گیری x است، که x متعلق به مجموعه F است. حال فرض کنید که یک مجموعه S از سناریوها برای پارامترهای تابع هدف داریم(S شامل تعداد محدودی از سناریوهای $|S|$ است) که توابع هدف مربوطه با نماد$f^s(x)$ نشان داده می‌شوند. بنابراین راه‌حل تأسف مینی‌ماکس، با توجه به مقاله زیدوناس و همکارانش(۲۰۱۷)، (در این مورد تأسف نسبی) با استفاده از مسئله زیر محاسبه می‌شود:

$$Z_{MMR} = \min y \tag{۱۲}$$

$$s.t.$$
$$f^s(x) \geq (1-y)Z^s \qquad s \in S$$
$$x \in F$$

که در این رابطه، Z^s مقدار بهینه مثبت برای سناریوی s است و y متغیری است که تأسف مینی‌ماکس نسبی را نشان می‌دهد.

در این پژوهش پس از حل مدل ۱، جواب‌های بهینه (λ_g^s) به دست آمده را، با در نظر گرفتن محدودیت‌های مدل فازی زیمرمن و تکرار محدودیت‌ها برای همه سناریوها، در مدل۲ که برای محاسبه تأسف مینی‌ماکس است و فرمول‌بندی اولیه آن در مقاله زیدوناس و همکارانش مطرح شده است، قرار داده و در نهایت مقدار بهینه تأسف مینی‌ماکس $MMR(g)$ برای هر ترکیب وزنی به دست می‌آید:

$$MMR(g) = Miny_g \tag{۱۳}$$

$$s.t.$$

$$w_1^g\lambda_1 + \ w_2^g\lambda_2 \geq (1-y_g)\lambda_g^s \qquad s \in S \quad ,\forall s$$

$$\lambda_1 \leq \ \frac{Z_1^- - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t}{Z_1^- - \ Z_1^*}$$

$$\lambda_2 \leq \ \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \, \bar{R}_i - \ Z_2^-}{Z_2^* - \ Z_2^-}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \, (R_{it} - \bar{R}_i) \ + \ y_t \geq 0 \qquad ,t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \, (R_{it} - \bar{R}_i) \ - \ y_t \leq 0 \qquad ,t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

در نهایت به تعداد ترکیب‌های وزنی مشخص شده، حل مدل ۲ تکرار می‌شود و جواب بهینه برای تأسف مینی‌ماکس به دست می‌آید. هر چه مقدار تأسف مینی‌ماکس محاسبه شده کوچک‌تر باشد، جواب به دست آمده استوارتر خواهد بود.

تجزیه و تحلیل یافته‌های پژوهش

در این پژوهش تمامی شرکت‌های فعال در بورس و فرابورس، با تحلیل بنیادی مورد بررسی قرار گرفتند، به طوری که نسبت‌های مالی آنها، با ورودی‌ها و خروجی‌های تعیین شده (که در شکل ۲ مشخص شده است)، استخراج شده‌اند و با استفاده از نرم افزار EMS، تحلیل پوششی داده‌ها روی آنها انجام شده است، در نهایت ۶۰ شرکت کارا برگزیده شده‌اند، ولی با توجه به اینکه نرخ بازده ۸۰ هفته کاری متوالی هر شرکت برای انجام پژوهش مورد نیاز است، نرخ بازده ۸۰ هفته متوالی تعدادی از شرکت‌ها، به دلیل متوقف بودن نماد آنها در بعضی از بازه‌های زمانی مورد نیاز، در دسترس نبود، بنابراین در نهایت نرخ بازده ۳۰ شرکت برای پژوهش حاضر کاربردی شد و مورد استفاده قرار گرفت.

در این پژوهش از پنج سناریوی مختلف برای محاسبه ریسک و بازده سبد سهام و تحلیل وضعیت آتی بازار بورس تهران استفاده شده است که تعداد سناریوها و دوره‌های زمانی در نظرگرفته شده، برگرفته از مقاله زیدوناس و همکارانش(۲۰۱۷) است:

- سناریوی ۱: داده‌های مربوط به ۱۰ هفته گذشته؛
- سناریوی ۲: داده‌های مربوط به ۲۰ هفته گذشته؛
- سناریوی ۳: داده‌های مربوط به ۴۰ هفته گذشته؛
- سناریوی ۴: داده‌های مربوط به ۶۰ هفته گذشته؛
- سناریوی ۵: داده‌های مربوط به ۸۰ هفته گذشته.

با توجه به سناریوهای در نظر گرفته شده، دوره‌ها به صورت هفتگی هستند، بنابراین بازدهی ۳۰ شرکت انتخابی برای ۸۰ هفته کاری متوالی (در سال‌های۱۳۹۶، ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸) به‌دست می‌آید تا داده‌های مربوط به پنج سناریو حاصل شود. لازم به بیان است که با افزایش سناریوها و دوره‌های زمانی انتخابی نتایج به دست آمده، دقیق تر می‌شود. برای محاسبه بازده درصدی سهام شرکت‌ها از فرمول زیر استفاده شده است:

$$R_{it} = \left(\frac{P_{it} - P_{i(t-1)} + D_{it}}{P_{i(t-1)}}\right) \times 100 \qquad (۱۴)$$

که در آن P_{it} قیمت پایانی سهام i ام در زمان t و همچنین $P_{i(t-1)}$ قیمت پایانی سهام iام در زمان $(t-1)$ و D_{it} سود توزیع شده سهم i در دوره t است.

در این پژوهش از یازده ترکیب وزنی ویژه استفاده شده است که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$(w_1^g, w_2^g)=$ (۰و۱), (۰,۱و۰,۹), (۰,۲و۰,۸), (۰,۳و۰,۷), (۰,۴و۰,۶), (۰,۵و۰,۵), (۰,۶و۰,۴), (۰,۷و۰,۳), (۰,۸و۰,۲), (۰,۹و۰,۱), (۱و۰)

نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل۱ (مدل فازی زیمرمن) و مدل۲(مدل تأسف مینی‌ماکس) به شرح زیر است:

در ابتدا مقدار ریسک و بازده مدل نهایی زیمرمن برای همه سناریوها و ترکیب های وزنی ویژه محاسبه می‌شود که مقادیر ریسک مدل۱ برای پنج سناریو و یازده ترکیب وزنی در جدول ۱ و مقادیر بازده مدل۱ برای پنج سناریو و یازده ترکیب وزنی ویژه در جدول ۲ قابل مشاهده است.

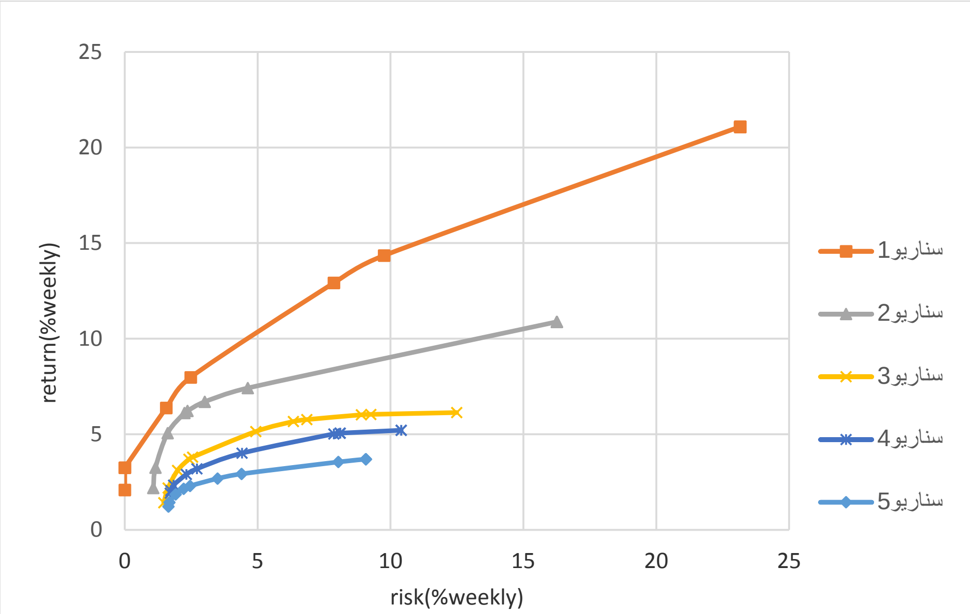
جدول ۱. مقادیر ریسک مدل زیمرمن برای پنج سناریو

W_1^g	W_2^g	Risk Senario1 (%weekly)	Risk Senario2 (%weekly)	Risk Senario3 (%weekly)	Risk Senario4 (%weekly)	Risk Senario5 (%weekly)
۱	۰	۰,۰۰۰۰	۱,۰۷۳۲	۱,۴۶۷۱	۱,۷۰۸۴	۱,۶۴۰۶
۰,۹	۰,۱	۰,۰۰۰۰	۱,۱۵۵۳	۱,۶۲۹۶	۱,۷۳۳۶	۱,۶۷۷۴
۰,۸	۰,۲	۰,۰۰۰۰	۱,۶۱۲۶	۱,۹۸۷۲	۱,۸۳۴۷	۱,۹۱۵۶
۰,۷	۰,۳	۱,۵۶۰۹	۲,۲۴۱۶	۲,۴۱۴۸	۲,۳۱۷۹	۲,۲۱۶۴
۰,۶	۰,۴	۲,۴۷۶۴	۲,۳۶۰۹	۲,۵۵۳۲	۲,۷۱۳۲	۲,۴۵۴۱
۰,۵	۰,۵	۷,۸۶۸۴	۳,۰۰۶۱	۴,۹۳۱۳	۴,۴۰۹۸	۳,۴۹۲۱
۰,۴	۰,۶	۹,۷۵۷۳	۴,۶۳۰۵	۶,۳۴۴۲	۷,۸۶۸۱	۴,۳۹۴۱
۰,۳	۰,۷	۲۳,۱۵۸۲	۱۶,۲۵۶۵	۶,۸۵۱۲	۸,۰۹۷۹	۸,۰۳۶۴
۰,۲	۰,۸	۲۳,۱۵۸۳	۱۶,۲۵۶۶	۸,۹۰۱۸	۸,۱۰۷۸	۹,۰۶۸۷
۰,۱	۰,۹	۲۳,۱۵۸۴	۱۶,۲۵۶۷	۹,۲۵۶۸	۱۰,۴۰۱۵	۹,۰۶۸۸
۰	۱	۲۳,۱۵۸۵	۱۶,۲۵۶۸	۱۲,۴۸۸۳	۱۰,۴۰۱۶	۹,۰۶۸۹

جدول ۲. مقادیر بازده مدل زیمرمن برای پنج سناریو

W_1^g	W_2^g	Return Senario1 (%weekly)	Return Senario2 (%weekly)	Return Senario3 (%weekly)	Return Senario4 (%weekly)	Return Senario5 (%weekly)
۱	۰	۲,۰۹۱۸	۲,۱۸۶۷	۱,۴۱۶۲	۱,۹۱۹۹	۱,۲۱۵۱
۰,۹	۰,۱	۳,۲۵۳۸	۳,۲۵۳۷	۲,۱۸۶۵	۲,۰۵۷۴	۱,۴۳۶۸
۰,۸	۰,۲	۳,۲۵۳۹	۵,۰۶۰۲	۳,۱۰۸۱	۲,۳۳۸۳	۱,۸۵۲۷
۰,۷	۰,۳	۶,۳۷۶۶	۶,۱۱۰۳	۳,۶۹۷۱	۲,۹۰۱۷	۲,۱۴۵۴
۰,۶	۰,۴	۷,۹۷۷۲	۶,۲۲۳۳	۳,۸۰۴۰	۳,۱۹۲۵	۲,۲۹۵۷
۰,۵	۰,۵	۱۲,۹۱۷۴	۶,۶۹۷۵	۵,۱۴۴۵	۴,۰۱۰۰	۲,۶۸۳۵
۰,۴	۰,۶	۱۴,۳۵۱۲	۷,۴۱۹۲	۵,۶۶۵۵	۵,۰۲۰۲	۲,۹۲۷۴
۰,۳	۰,۷	۲۱,۰۸۸۰	۱۰,۸۸۰۷	۵,۷۶۷۹	۵,۰۵۷۶	۳,۵۵۰۲
۰,۲	۰,۸	۲۱,۰۸۸۲	۱۰,۸۸۰۸	۶,۰۱۷۵	۵,۰۵۸۶	۳,۶۹۵۴
۰,۱	۰,۹	۲۱,۰۸۸۳	۱۰,۸۸۰۹	۶,۰۳۹۲	۵,۲۰۸۷	۳,۶۹۵۵
۰	۱	۲۱,۰۸۸۴	۱۰,۸۸۱۰	۶,۱۳۴۵	۵,۲۰۸۸	۳,۶۹۵۶

همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۲ قابل مشاهده است، با توجه به اینکه از یازده ترکیب وزنی و پنج سناریو استفاده شده است، مقدار ریسک و بازده مدل نهایی زیمرمن ۵۵ مرتبه محاسبه می‌شود، به عبارتی برای هر سناریو یازده نقطه در جبهه پارتو به دست می‌آید. نتایج حاصل از این محاسبات در نمودار شکل ۳ قابل مشاهده است.



شکل ۳. نمودار مرز کارای ریسک–بازده برای پنج سناریو

شکل ۳، نمودار پنج جبهه پارتوی متناظر با هر یک از سناریوهای بررسی شده را نشان می‌دهد. این پنج جبهه به هم شباهتی ندارند چون به سناریوهای بازده متفاوتی تعلق دارند. به عنوان مثال سناریوهای چهار و پنج در مقایسه با سناریوهای یک و دو و سه، به بازده‌های بیشتر و دوره‌های بیشتر مربوط هستند. همان‌طور که در نمودار مشخص است، در قسمت سمت راست بالای نمودار که مربوط به حداکثر رساندن بازده است، میزان پراکندگی بیشتر از قسمت سمت چپ پایین نمودار که مربوط به حداقل رساندن ریسک است، بنابراین این مشاهده می‌تواند

دلیلی باشد بر اینکه نواحی دارای استواری بیشتر، در قسمت سمت چپ و پایین نمودار قرار دارند.

جدول payoff table برای پنج سناریو به صورت زیر است که جدول ۳ شامل بهترین جواب یا به عبارت دیگر مقدار بهینه تابع هدف ریسک و بازده و همچنین بدترین جواب برای تابع هدف ریسک و بازده است که برای هر سناریو مقادیر آن‌ها متفاوت است.

جدول ۳. جدول payoff table برای پنج سناریو

Scen5: 80week	**Z_2 = Return (% weekly)**	**$Z_2^{'}$=۱,۲۱**	**Z_2^{*}=۳,۶۴**
	Z_1 = Risk (% weekly)	Z_1^{*}=۱,۶۴	$Z_1^{'}$=۹,۰۶
Scen4: 60week	Z_2 = Return (% weekly)	$Z_2^{'}$=۱,۹۲	Z_2^{*}=۵,۲۱
	Z_1 = Risk (% weekly)	Z_1^{*}=۱,۷۱	$Z_1^{'}$=۱۰,۴
Scen3: 40week	Z_2 = Return (% weekly)	$Z_2^{'}$=۱,۴۲	Z_2^{*}=۶,۱۳
	Z_1 = Risk (% weekly)	Z_1^{*}=۱,۴۷	$Z_1^{'}$=۱۲,۴
Scen2: 20week	Z_2 = Return (% weekly)	$Z_2^{'}$=۲,۱۹	Z_2^{*}=۱۰,۸
	Z_1 = Risk (% weekly)	Z_1^{*}=۱,۰۷	$Z_1^{'}$=۱۶,۲
Scen1: 10week	Z_2 = Return (% weekly)	$Z_2^{'}$=۲,۰۹	Z_2^{*}=۲۱,۱
	Z_1 = Risk (% weekly)	Z_1^{*}=۰,۰۰	$Z_1^{'}$=۲۳,۱
		Min MAD	Max Return

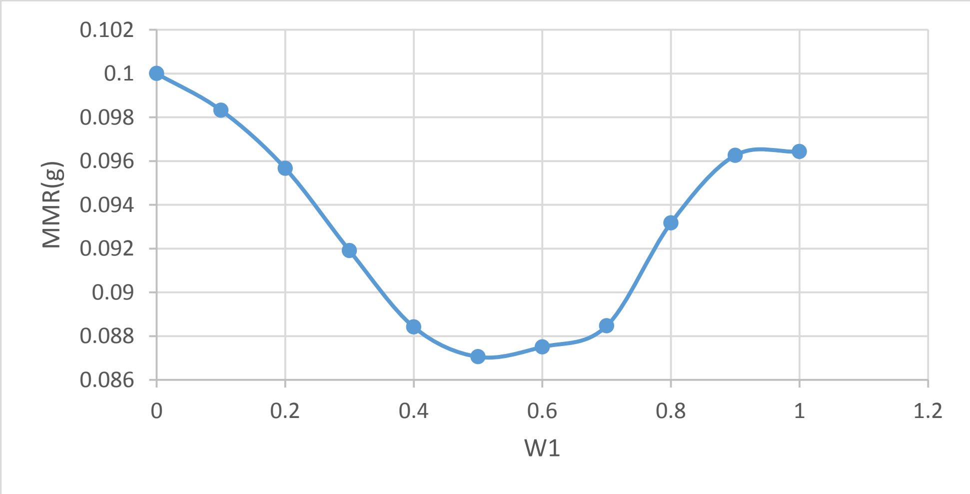
پس از محاسبه مقدار ریسک و بازده زیمرمن به ازای هر ترکیب وزنی و به دست آوردن جبهه پارتو برای هر سناریو، لازم است مقدار بهینه λ_g^s زیمرمن به ازای هر ترکیب وزنی و برای هر سناریو به دست آید که نتایج حاصله در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴. مقدار بهینه λ_g^s زیمرمن برای پنج سناریو

W_1^g	W_2^g	λ_g^s Senario1	λ_g^s Senario2	λ_g^s Senario3	λ_g^s Senario4	λ_g^s Senario5
۱	۰	۱,۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰
۰,۹	۰,۱	۰,۹۰۶	۰,۹۰۷	۰,۹۰۳	۰,۹۰۱	۰,۹۰۴
۰,۸	۰,۲	۰,۸۱۲	۰,۸۳۷	۰,۸۳۳	۰,۸۱۳	۰,۸۲۱
۰,۷	۰,۳	۰,۷۲۰	۰,۷۸۱	۰,۷۸۴	۰,۷۴۰	۰,۷۵۸
۰,۶	۰,۴	۰,۶۵۹	۰,۷۳۴	۰,۷۴۳	۰,۶۸۵	۰,۷۰۸
۰,۵	۰,۵	۰,۶۱۵	۰,۶۹۵	۰,۷۳۷	۰,۶۶۲	۰,۶۷۱
۰,۴	۰,۶	۰,۶۱۸	۰,۶۶۷	۰,۷۶۳	۰,۶۸۲	۰,۶۶۵
۰,۳	۰,۷	۰,۷۰۰	۰,۷۰۱	۰,۷۹۹	۰,۷۴۷	۰,۷۰۰
۰,۲	۰,۸	۰,۸۰۰	۰,۸۰۰	۰,۸۴۵	۰,۸۱۶	۰,۸۰۰
۰,۱	۰,۹	۰,۹۰۰	۰,۹۰۰	۰,۹۱۱	۰,۹۰۰	۰,۹۰۰
۰	۱	۱,۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰	۱,۰۰

پس از محاسبه مقادیر بهینه λ_g^s به ازای هر ترکیب وزنی g و برای هر سناریوی s، آنها را به عنوان پارامتر در مدل۲ قرار داده تا مسئله‌ای که مقدار تأسف مینی‌ماکس (MMR(g)) را برای هر ترکیب وزنی خاص محاسبه می‌کند، حل شود. جواب بهینه مقدار تأسف مینی‌ماکس برای هر ترکیب وزنی ویژه در جدول ۵ مشخص شده است.

همان‌طور که درجدول ۵ قابل مشاهده است، با توجه به ترکیب‌های وزنی ویژه، یازده مرتبه مدل مینی‌ماکس تأسف را حل کرده و در نهایت یازده جواب بهینه برای تابع تأسف مینی‌ماکس به دست می‌آید. نمودار شکل ۴ بیان کننده مقادیر بهینه تأسف مینی‌ماکس بر اساس وزن ریسک در ترکیب‌های وزنی ویژه است.



شکل ۴. نمودار مقادیر بهینه MMR(g) به ازای هر ترکیب وزنی ویژه ریسک

شکل ۴، نمودار مقدار تأسف مینی‌ماکس به ازای وزن ریسک را نشان می‌دهد. همان طور که پیشتر نیز به این موضوع اشاره شد، تأسف مینی‌ماکس بیان می‌کند که ما تا چه اندازه از مقادیر بهینه هر سناریو در بدترین حالت، فاصله داریم که به صورت تابعی با مقادیری بین صفر و یک بیان می‌شود. هرچه مقدار تأسف مینی‌ماکس(MMR(g)) کمتر باشد، راه‌حل حاصله استوارتر است. راه‌حل‌های استوار از این نظر جذاب و مورد توجه هستند که صرف نظر از اینکه کدام سناریو در نهایت اتفاق می‌افتد، می‌توانند ما را به مقدار بهینه سناریوهای در نظرگرفته شده نزدیک کنند. همان‌طور که در نمودار مشخص است، وقتی وزن w_1 که مربوط به تابع هدف حداقل کردن ریسک است، صفر در نظر گرفته شود یا به بیانی دیگر وزن w_2 که مربوط به تابع هدف حداکثر کردن بازده است، یک در نظر گرفته شود، میزان تأسف مینی‌ماکس (MMR(g)) در حداکثر مقدار خود قرار دارد. همچین وقتی وزن w_1 یک در نظر گرفته شود یا به بیان دیگر وزن w_2 صفر در نظر گرفته شود، میزان پشیمانی نیز تقریبا زیاد است. بنابراین می‌توان به این نتیجه رسید که اگر یکی از توابع هدف مربوط به ریسک و بازده را در نظر نگیریم و ارزش و اهمیتی برای یکی از آنها منظور نکنیم و وزنی به آنها اختصاص ندهیم، میزان تأسف و پشیمانی بسیار زیاد است و به عبارتی ریسک‌گریزی مطلق و ریسک‌پذیری مطلق در مدل ما

بیشترین تأسف را به همراه دارد. با توجه به نمودار، وقتی وزن تابع هدف ریسک از $w_1 = 0$ به سمت $w_1 = 0.5$ افزایش پیدا می‌کند و به عبارتی وقتی تا این مرز وزنی از ریسک‌پذیری فاصله می‌گیریم و تا حدی به سمت ریسک‌گریزی تمایل پیدا می‌کنیم و به حالت تعادلی نزدیک می‌شویم، میزان پشیمانی نزولی می‌شود و کاهش پیدا می‌کند و سپس وقتی وزن تابع هدف حداقل کردن ریسک از $w_1 = 0.5$ به سمت $w_1 = 1$ افزایش پیدا می‌کند و به سمت ریسک‌گریزی مطلق تمایل پیدا می‌کنیم، میزان پشیمانی صعودی می‌شود و افزایش می‌یابد. بنابراین همان طور که مشخص است وقتی وزن حداقل کردن ریسک $w_1 = 0.5$ است، میزان تأسف مینی‌ماکس در حداقل مقدار خود است که می‌توان به این نتیجه دست یافت که وقتی به تابع هدف ریسک و بازده ارزش و اهمیت یکسان می‌دهیم، میزان تأسف مینی‌ماکس در حداقل مقدار خود است و راه‌حل‌های استوارتری را نسبت به حالات دیگر فراهم می‌آورد و سبد سهام انتخابی سبدی بهینه است.

در خصوص تحلیل عملکرد مدل، لازم به بیان است که در رویکردهای سنتی مانند مارکویتز تنها یک سناریو که سناریوهای محتمل یا سناریوی میانه است، در نظر گرفته می‌شود. اگر بخواهیم برپایه رویکردهای سنتی یک سناریو را مورد بررسی قرار دهیم، از سناریو۳ به عنوان سناریوی میانه استفاده می‌شود. مقدار تأسف مینی‌ماکس (MMR(g))، برپایه رویکردهای سنتی، برای سناریوی ۳، در جدول ۵ آورده شده است:

جدول ۵. مقدار بهینه $MMR(g)$ به ازای هر ترکیب وزنی ویژه

W_1^g	۱	۰,۹	۰,۸	۰,۷	۰,٦	۰,٥	۰,٤	۰,۳	۰,۲	۰,۱	۰
W_2^g	۰	۰,۱	۰,۲	۰,۳	۰,۴	۰,۵	۰,۶	۰,۷	۰,۸	۰,۹	۱
روش سنتی $MMR(g)$	۴,۷۱۸۳	۳,۹۴۸۰	۳,۰۲۶۴	۲,۴۳۷۴	۲,۳۳۰۵	۰,۹۹۰۰	۰,۴۶۹۰	۰,۳۶۶۶	۰,۱۱۷۰	۰,۰۹۵۳	۰
روش پیشنهادی $MMR(g)$	۰,۰۹۶۰	۰,۰۹۶۲	۰,۰۹۳۱	۰,۰۸۸۴	۰,۰۸۷۵	۰,۰۸۷۰	۰,۰۸۸۴	۰,۰۹۱۹	۰,۰۹۵۶	۰,۰۹۸۳	۰,۱۰۰۰

همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، میزان تأسف مینی‌ماکس طبق رویکردهای سنتی، در مقایسه با مدل پژوهش بیشتر است. بنابراین مدل پژوهش ضمن در نظر گرفتن همه سناریوها، تأسف سرمایه‌گذار را به مقدار چشمگیری کاهش می‌دهد که این خود نشان دهنده برتری مدل نسبت به رویکردهای سنتی است.

بحث و نتیجه‌گیری

پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه مدیریت سبد سهام، حرکت آنی و رو به رشد بهینه‌سازی استوار سبد سهام را نشان می‌دهد ولی هر کدام از این روش‌ها در کنار برتری‌هایشان، معایبی نیز به همراه دارند که باید نسبت با آنها بررسی عمیق‌تری صورت گیرد. به منظور بررسی استواری سبد سهام و محافظت از آن در برابر عدم قطعیت داده‌های ورودی، ابزارها و رویکردهای جدید و مؤثری باید ایجاد شده و مورد آزمایش و تحلیل قرار گیرند. در این پژوهش ابزار آنالیز بهینه‌سازی چند هدفه، به رویکردهای استوار و فازی گسترش داده شد. به عبارتی از رویکرد فازی زیمرمن و از رویکرد استوار مینی‌ماکس تأسف، برای انتخاب مرزکارا و نقاط استوار استفاده شد. به طور اختصاصی‌تر باید گفت که در این پژوهش مدل پیشنهادی بر روی سی شرکت فعال در بورس اوراق بهادارتهران بررسی و از پنج سناریوی مختلف که داده‌های هر کدام از آنها متعلق به دوره‌های مختلف است، استفاده شد. جبهه پارتوی هر سناریو با یازده نقطه که هر کدام از آنها به یک ضریب وزنی خاص برای توابع هدف ریسک و بازده اختصاص داشتند، تخمین زده شد. در نهایت می‌توان بیان کرد که نتایج به دست آمده کاملا معنادار هستند، زیرا مناطقی از جبهه پارتو را پیشنهاد می‌کند که استوارتر هستند، به طوری که هر چه مقدار تأسف مینی‌ماکس برای هر ترکیب وزنی کمتر باشد، راه‌حل بهینه استوارتر خواهد بود. همچنین استفاده از روش فازی زیمرمن در پژوهش، خروجی معقولانه‌تری را به همراه دارد که باعث می‌شود تعادلی بین توابع هدف حداقل کردن ریسک و حداکثر کردن بازده به وجود آید. همچنین در این پژوهش مشخص شد که زمانی که وزن تابع هدف حداقل کردن ریسک افزایش یابد، امنیت بیشتری وارد سبد سهام‌های بهینه می‌شود.

سویستر (۱۹۷۳) نخستین کسی است که ایده بهینه‌سازی استوار را معرفی می‌کند که در قالب یک الگوی بهینه‌سازی خطی ارائه شد که بهترین جواب پذیرفتنی برای همه داده‌های ورودی را ارائه می‌کند، به طوری که هر داده ورودی می‌تواند هر مقداری از یک بازه را اختیار

کند. این رویکرد تمایل به یافتن جواب‌هایی دارد که بیش محافظه‌کارانه هستند. بدین معنی که برای اطمینان از استوار بودن جواب در این رویکرد به مقدار زیادی از بهینگی چالش اسمی دور می‌شویم. روش سویستر دارای محافظت بالا، در عمل خیلی محافظه‌کارانه و در آنالیز حساسیت جواب استوار تابع هدف خیلی بدتر از جواب بهینه چالش اسمی خواهد بود که از این لحاظ، این مدل بدبینانه در میان پژوهشگران نـامطلوب اسـت. بن- تال و نمیرفسکی (۱۹۹۸) یک روش استوار را توسعه دادند که در آن جـواب‌هـای بهینه خوشبینانه‌تر هستند. ایده آنها از نقطه درونی براساس یک الگوریتم، برای یـافتن جواب استوار به عنوان قسمتی از مدل اولیه استفاده می کند. آنها همچنین روش استوار خود را روی چندین چالش بهینه‌سازی سبد سهام به کار مـی‌برنـد و نشـان مـی‌دهنـد کـه جواب نهایی در مقابل عـدم قطعیـت روی پارامترهـای ورودی مختلـف شـدنی، بـاقی می‌ماند. برتسیماس و سیم(۲۰۰۴) روش‌های بهینه‌سازی استوار مختلفی را در تلاش برای حفظ ساختار مسئله اصلی، توسعه داده‌اند. با وجودی که روش آنها جواب‌هـایی را به دست نمی‌دهد که مانند روش بن—تال خوشبینانه باشـد، سـاختار چالش اصـلی مانند قبل خطی، باقی می‌ماند و آن را مطلـوب‌تـر مـی‌سـازد. پژوهش حاضر نیز جواب‌های بهینه استواری را ارائه می‌دهد که راه‌حل‌های محافظه‌کارانه کمتری را نسبت به روش بسیار بدبینانه سویستر ارائه می‌دهد ولی از رویکرد خوشبینانه بن-تال، محافظه‌کارانه‌تر است. در ادامه کیم و همکارانش(۲۰۱۸) و اهرگات و همکارانش(۲۰۱۴)، از رویکرد بدترین حالت(مینی‌ماکس) استفاده کردند و نتایج پژوهش‌های آنها بیان می‌کند که این رویکرد استوار برای حل مسائل بهینه‌سازی سبد سهام بسیار معقول بوده و همچنین پیچیدگی کمتر محاسباتی و دیدگاه محافظه‌کارانه‌ای که دارد، باعث ایجاد یک نتیجه ایده‌آل خواهد شد که پژوهش حاضر نیز از این رویکرد بهره برده و با این نتایج همسو بوده و سبد سهامی را ارائه می‌دهد که دارای استواری کافی است. همچنین لی و همکارانش(۲۰۱۲)، لیم و همکارانش(۲۰۱۲) و گریگوری و همکارانش(۲۰۱۱)، از روش به حداقل رساندن تأسف برای بهینه‌سازی سبد سهام استفاده کردند که نتایج پژوهش‌های آنها نشان می‌دهد که سبد سهام بهینه، میزان تأسف سرمایه‌گذار را به طور متوسط کاهش می‌دهد و از نظر تعداد دارایی و وزن دارایی‌ها متنوع وکارآمد است که در پژوهش حاضر نیز از این رویکرد استوار استفاده شده و با توجه به این که از رویکرد بدترین حالت نیز بهرمند شده است، نتایج استواتر و کارآمدتری را ارائه می‌دهد، به طوری که تأسف سرمایه‌گذار را به طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد. دی و همکارانش(۲۰۱۸)، لیو و

ژانگ(۲۰۱۱) از مدلسازی استوار فازی برای بهینه‌سازی سبد سهام استفاده کردند که نتایج نشان می‌دهد روش بالا برای انتخاب پروژه کارا، مناسب و قابل به‌کارگیری است. در نهایت لازم به بیان است که زیدوناس و همکارانش(۲۰۱۷) از رویکرد تأسف مینی‌ماکس برای بهینه‌سازی چند هدفه استوار سبد سهام استفاده کردند، به طوری که نتایج به دست آمده از استواری لازم برخوردار هستند، به عبارتی با در نظرگرفتن سناریوهای مختلف و ترکیب‌های وزنی ویژه برای توابع هدف ریسک و بازده، مناطقی از جبهه پارتو را پیشنهاد می‌کنند که استوارتر هستند و تأسف سرمایه‌گذار را به حداقل می‌رسانند، بنابراین پژوهش حاضر نیز از این رویکرد استفاده کرده و ادعای بالا را اعتبارسنجی کرده و مدل ارائه شده را مناسب و روش مورد استفاده را کارا می‌داند، به طوری که در مقایسه با رویکردهای سنتی بهتر عمل کرده و تأسف سرمایه‌گذار را به میزان چشمگیری کاهش می‌دهد. همچنین این پژوهش در کنار این رویکرد، از رویکرد فازی زیمرمن که به عنوان روشی برای حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه مطرح شده است، استفاده کرده که خروجی معقولانه‌تری را به همراه دارد و باعث ایجاد مطلوبیت توابع هدف می‌شود، به عبارتی دیگر، تعادلی بین توابع هدف حداقل کردن ریسک و حداکثر کردن بازده به وجود می‌آورد.

پیشنهادها

با توجه به نتایج بدست آمده، پیشنهادهای کاربردی زیر برای سرمایه‌گذاران ارائه می‌شوند:

۱. پیشنهاد می‌شود که سرمایه‌گذاران سعی کنند سهام شرکت‌هایی را برای بررسی انتخاب کنند که از دیدگاه بنیادی و تکنیکال در جایگاه ایده‌آلی قرار داشته باشند تا بتوانند در میان‌مدت و بلندمدت سودآور باشند و بازدهی مطلوبی را ایجاد کنند.

۲. پیشنهاد می‌شود که سرمایه‌گذاران سبد سهام متنوعی را از گروه‌های مختلف، برای سرمایه‌گذاری انتخاب کنند و برای هر سهم بودجه‌بندی‌های متفاوتی را با توجه به شرایط آن در نظر گرفته، تا میزان ریسک سرمایه‌گذاری کاهش یابد.

۳. پیشنهاد می‌شود که سرمایه‌گذاران، از جهت بودجه‌بندی در سبد سرمایه‌گذاری، با توجه به نوسانات اقتصادی کشور، همواره حالت بدبینانه را در نظر بگیرند تا میزان تأسف و پشیمانی آنها کاهش یابد.

همچنین برای انجام پژوهش‌های آتی موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

۱. در راستای بهینه‌سازی سبد سهام، با توجه به اینکه توابع هدف می‌توانند متغیر باشند، می‌توان از این روش برای توابع هدف بیشتر استفاده کرد و همچنین محدودیت‌های مدل را ارتقا داد.
۲. با توجه به اینکه در این پژوهش از رویکرد فازی زیمرمن برای بهینه‌سازی چند هدفه بهره برد شد، می‌توان از روش‌های چند هدفه دیگر و هچنین وزن‌های بیشتر نیز استفاده کرد و جواب‌های بهینه به دست آمده در جبهه پارتو را مورد بررسی قرار داد.
۳. برای به دست آوردن نقاط استوار و سبد سهام بهینه می‌توان از روش‌های دیگری به جز روش تأسف مینی‌ماکس بهره برد و استواری آنها را تجزیه و تحلیل کرد.

References

Bertsimas, D. and D. Pachamanova. (2008). "Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs", Computers & Operations Research, 35(1): p. 3-17.

De, M., B.K. Mangaraj, and K.B. Das .(2018). "A fuzzy goal programming model in portfolio selection under competitive-cum-compensatory decision strategies", Applied Soft Computing, 73: p. 635-646.

Ehrgott, M., J. Ide, and A. Schöbel. (2014). "Minmax robustness for multi-objective optimization problems", European Journal of Operational Research, 239(1): p. 17-31.

Fliege, J. and R. Werner. (2014). "Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization", European Journal of Operational Research, 234(2): p. 422-433.

Gregory, C., K. Darby-Dowman, and G. Mitra. (2011). "Robust optimization and portfolio selection: The cost of robustness", European Journal of Operational Research, 212(2): p. 417-428.

Huo, L., T.-H. Kim, and Y. Kim. (2012). "Robust estimation of covariance and its application to portfolio optimization", Finance Research Letters, 9(3): p. 121-134.

Kim, J.H., W.C. Kim, and F.J. Fabozzi. (2013). "Composition of robust equity portfolios", Finance Research Letters, 10(2): p. 72-81.

Kim, J.H., W.C. Kim, and F.J. Fabozzi. (2014). "Recent developments in robust portfolios with a worst-case approach", Journal of Optimization Theory and Applications, 161(1): p. 103-121.

Kim, W.C., et al. (2013). "What do robust equity portfolio models really do?" Annals of Operations Research, 205(1): p. 141-168.

Kim, W.C., et al. (2014). "Robust portfolios that do not tilt factor exposure", European Journal of Operational Research, 234(2): p. 411-421.

Kim, J.H., W.C. Kim, and F.J. Fabozzi. (2018). "Recent advancements in robust optimization for investment management", Annals of Operations Research, 266(1-2): p. 183-198.

Kouvelis, P. and G. Yu. (2013). "Robust discrete optimization and its applications", Vol. 14: Springer Science & Business Media.

Li, X., B. Shou, and Z. Qin. (2012). "An expected regret minimization portfolio selection model", European Journal of Operational Research, 218(2): p. 484-492.

Liagkouras, K. and K. Metaxiotis. (2018). "Multi-period mean–variance fuzzy portfolio optimization model with transaction costs", Engineering Applications of Artificial Intelligence, 67: p. 260-269.

Lim, A.E., J.G. Shanthikumar, and G.-Y. Vahn. (2012). "Robust portfolio choice with learning in the framework of regret: Single-period case", Management Science, 58(9): p. 1732-1746.

Lim, M. (2012). "Genetic algorithms for portfolio selection problems minimum transaction lots", European Journal of Operational Research, 185(1): p. 393-404.

Liu, Y.-J. and W.-G. Zhang. (2013). “Fuzzy portfolio optimization model under real constraints”, insurance: Mathematics and Economics, 53(3): p. 704-711.

Lwin, K.T., R. Qu, and B.L. MacCarthy. (2017). “Mean-VaR portfolio optimization: A nonparametric approach”, European Journal of Operational Research, 260(2): p. 751-766.

Maillet, B., S. Tokpavi, and B. Vaucher. (2015). “Global minimum variance portfolio optimisation under some model risk: A robust regression-based approach”, European Journal of Operational Research, 244(1): p. 289-299.

Markowitz, H. (1952). "Portfolio selection", the journal of finance, 7(1): p. 77-91.

Markowitz, H.M. (1959). "Portfolio selection: Efficient diversification of investment", John Wiley & Sons, New York, USA, p. 344.

Pätäri, E., et al. (2018). "Comparison of the multicriteria decision-making methods for equity portfolio selection: The U.S. evidence", European Journal of Operational Research, 265(2): p. 655-672.

Xidonas, P. and Mavrotas, G, Hassapis, CH, Zopounidis, C. (2017). "Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach", European Journal of Operational Research, 262: P.299–305

Zimmermann, H. L. (1978). "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", Fuzzy Sets and Systems, 1: p. 45-55.