Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153
Online ISSN: 2423-5377

Modeling Financial Markets Using Combined Ornstein-uhlenbeck Process with Levy Noise

Mina Mohammadi
MSc., Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Urmia University of Technology, Urmia, Iran. E-mail: minamohammadi@sci.uut.ac.ir

Parisa Nabati
*Corresponding Author, Assistant Prof., Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Urmia University of Technology, Urmia, Iran. E-mail: p.nabati@uut.ac.ir

Abstract

Objective: The main purpose of this paper is to investigate a developed stochastic algorithm for modeling financial markets using the Ornstein-uhlenbeck process combined with Levy noise. Using the closing prices of stock markets, it can be concluded that the stochastic model of the Ornstein-uhlenbeck process with time-dependent parameters significantly improves the performance of stock price forecasting.

Methods: At first, we study the stochastic differential equation that is composed of Ornstein-uhlenbeck independent processes. Since these processes are extracted by the gamma process, we call it the gamma Ornstein-uhlenbeck process, We used a stochastic differential equation under the combination of two independent processes and simulate the time series data. The parameter estimation is done using the maximum likelihood estimator.

Results: To illustrate the performance of the proposed model, we apply the desired stochastic differential equation for a set of financial time series from Tehran Oil Refining Company, Saipa Azin, and the Cement of Urmia stock exchanges. The simulated data mimics the original financial time series data. This is observed from the estimates of root mean square error criteria.

Conclusion: Numerical results show that the predicted volatility of these companies is close to the simulated ones. The advantage of this methodology is the fact that the estimates obtained are stable around the true value and also the low errors indicate that the estimation procedure is accurate, therefore producing a higher forecasting accuracy. Thus, the proposed estimation algorithm is suitable with large data sets and has good convergence properties.

Keywords: Financial markets, Levy process, Ornstein-uhlenbeck model, Stochastic volatility

Citation: Mohammadi, Mina and Nabati, Parisa (2021). Modeling Financial Markets Using Combined Ornstein-uhlenbeck Process with Levy Noise. *Financial Research Journal*, 23(3), 404-418. https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.314584.1007105 (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2021, Vol. 23, No.3, pp. 404-418
https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.314584.1007105

Published by University of Tehran, Faculty of Management

Article Type: Research Paper
Received: January 10, 2021
Accepted: May 19, 2021

شاپا چاپی: ۸۱۵۳-۱۰۲۴
شاپا الکترونیکی: ۵۳۷۷-۲۴۲۳
تحقیقات مالی

مدل‌سازی بازارهای مالی با استفاده از فرایند ارنشتاین اولنبگ ترکیبی با نویز لوی

مینا محمدی
کارشناس ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: minamohammadi@sci.uut.ac.ir

پریسا نباتی
* نویسنده مسئول، استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: p.nabati@uut.ac.ir

چکیده

هدف: پیش‌بینی بازارهای مالی همواره برای فعالان اقتصادی حائز اهمیت بوده است. هدف اصلی این مقاله، ارائه مدل توسعه‌یافته جدید برای مدل‌سازی بازارهای مالی با استفاده از فرایند ارنشتاین اولنبک ترکیبی با نویز لوی است. با استفاده از قیمت‌های بسته شده بازارهای سهام، می‌توان نتیجه گرفت که مدل تصادفی ارنشتاین اولنبک با پارامترهای وابسته به زمان، به‌طور شایان توجهی عملکرد پیش‌بینی قیمت سهام را بهبود می‌بخشد.

روش: ابتدا به بررسی معادله دیفرانسیل تصادفی که از فرایندهای مستقل ارنشتاین اولنبک تشکیل شده است، پرداخته شد. این فرایندها را از طریق فرایند گاما استخراج کردیم، از این رو، آن را فرایند ارنشتاین اولنبک گاما می‌نامیم که کلاسی از فرایندهای زمان پیوسته لوی است و رفتاری با حافظه بلندمدت دارد. برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی صورت گرفته است.

یافته‌ها: برای نشان‌دادن کارایی مدل ارائه شده، برخی از بازارهای سهام ایران، مانند شرکت‌های سیمان ارومیه، ساپیا آذین و پالایش نفت تهران، به‌صورت عددی شبیه‌سازی شدند. پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنبک با نویز گاما با استفاده از داده‌های واقعی برآورد شد.

نتیجه‌گیری: نتایج عددی نشان داد که نوسان پیش‌بینی‌شده این شرکت‌ها به نوسان شبیه‌سازی‌شده نزدیک است و در آن دینامیک نوسان از مدلی خودهم‌بسته پیروی می‌کند. مزیت روش یادشده این است که برآوردهای به‌دست‌آمده در اطراف مقدار واقعی پایدارند، از این رو الگوریتم تخمین برای مجموعه داده‌های بزرگ امکان‌پذیر بوده و از خصوصیت هم‌گرایی خوبی برخوردار است.

کلیدواژه‌ها: بازارهای مالی، فرایند لوی، مدل ارنشتاین اولنبک ، نوسان‌های تصادفی

استناد: محمدی، مینا؛ نباتی، پریسا (۱۴۰۰). مدل‌سازی بازارهای مالی با استفاده از فرایند ارنشتاین اولنبگ ترکیبی با نویز لوی. *تحقیقات مالی*، ۲۳(۳)، ۴۰۴- ۴۱۸.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۰، دوره ۲۳، شماره ۳، صص. ۴۰۴- ۴۱۸
دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۹

DOI: https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.314584.1007105
نوع مقاله: علمی پژوهشی
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران

مقدمه

بازار مالی برای افراد، همیشه به عنوان ابزاری برای افزایش ثروت جذاب بوده و کسانی که پیش‌بینی‌های دقیقی می‌کنند از آن سود می‌برند. پیش‌بینی مدل‌های خطی برای محاسبه بسیار ساده است، با این حال، آنها تقریبی از روابط تحت اختیار در داده‌ها را نشان می‌دهند که به پیش‌بینی‌های ضعیف منجر می‌شود. یکی از مشهورترین فرایندهایی که اخیراً از آن در مدل‌های مالی بسیار استفاده شده، فرایند لوی[۱] است که نموهای مستقل و مانایی دارد. مدل‌های تصادفی استخراج‌شده از فرایند لوی توسط بارندرف و شفارد ارائه شده است (بارندرف و شفارد[۲]، ۲۰۰۰) . در اینجا ما یک ترکیب از فرایند لوی و فرایند ارنشتاین اولنبک[۳] را ارائه می‌دهیم. فرایند ارنشتاین اولنبک، یک فرایند گاوس مارکف (فرایندی با مشخصات گاوسی و مارکوف) ایستا بوده و تنها فرایندی است که سه شرط فرایندهای گاوس مارکوف را در نظر می‌گیرد و تبدیلات خطی فضا و زمان را ممکن می‌سازد. در طول زمان این فرایند به میانگین طولانی مدت خود میل می‌کند، از این رو به این فرایندها، فرایند بازگشت به میانگین[۴] می‌گویند. هاروی[۵] (۱۹۹۸) و بریدیت و لیما[۶] (۱۹۹۸) مدل‌های زمان گسسته‌ای را در نظر گرفتند که در آن لگاریتم نوسان به عنوان یک فرایند انتگرالی کسری مدل‌سازی می‌شود. کمتی و رنالت[۷] (۱۹۹۸) توسط مدل‌های زمان پیوسته، نوسان تحت یک فرایند انتگرالی کسری براونی را مدل کردند. با این تفاسیر می‌توان برخی از خصوصیات سری زمانی مالی، مانند تغییرات نوسان و متغیرهای آن را وابسته به زمان در نظر گرفت. در حال حاضر، اعتقاد تونیبوا[۸] (۲۰۱۵) بر این است که زمان و قیمت بورس کالا ممکن است وابسته به مدل تصادفی باشد، یعنی بین تعداد نقاط در فواصل زمانی پی در پی هم‌بستگی وجود داشته باشد. بنابراین ما یک معادله دیفرانسیل تصادفی[۹] پیوسته و غیرمنفی پیشنهاد می‌کنیم که در توصیف وابستگی‌ها بین دنباله‌ای از قیمت‌های سهام مفید است. با این حال، یکی از ویژگی‌های اصلی سری زمانی مالی این است که مدل‌های قطعی برای توصیف کامل، آماری از نوسان‌ها را ندارند (بروکمن و چودری[۱۰]، ۱۹۹۷). بنابراین مدل‌های تصادفی مناسب برای توصیف سری زمانی مالی به کار گرفته می‌شود. همان طور که در دیدگاه بیزی توسط تیلور[۱۱] (۱۹۹۲) بیان شده است، نوسان‌های بازده مشاهده شده می‌توانند از طریق یک مدل پنهان مارکوف بیان شوند و به موجب آن سری زمانی مالی، فرایند مشاهده شده و نوسان‌ها، حالت پنهان باشند. این نوع مدل‌ها حالت خاصی از مدل‌های نوسان‌های تصادفی[۱۲] هستند. اشکال اصلی استفاده از مدل‌های نوسان تصادفی، جای‌گذاری داده‌ها با دقت بالا در فرایند تصادفی و مشخصات مدل است، زیرا

1. Levy Process
2. Barndorff-Nielsen & Shephard
3. Ornstein-Uhlenbeck Process
4. Mean Reverting
5. Harvey
6. Breidt & Lima
7. Comte & Renault
8. Tweneboah
9. Stochastic Differential Equation
10. Brockman & Chowdhury
11. Taylor
12. Stochastic Volatility

محاسبات آنها شامل ادغام عددی روی انتگرال‌هایی با بعد بالا است که اکثر آنها ساده نیستند (روبیو و جانسن[1]، ۲۰۱۳). در این مقاله، یک تکنیک برای پیش‌بینی سری زمانی مالی با استفاده از مدل تصادفی ارنشتاین اولنبک ارائه می‌دهیم. با استفاده از قیمت بسته شده بازارهای سهام که در آن، داده‌های واقعی بازار از سایت fipiran گرفته می‌شود، نتیجه می‌گیریم مدل تصادفی ارنشتاین اولنبک با پارامترهای وابسته به زمان، به‌طور شایان توجهی عملکرد پیش‌بینی قیمت سهام را بهبود می‌بخشد. ما از یک معادله دیفرانسیل تصادفی که ترکیبی از دو فرایند مستقل ارنشتاین اولنبک است، برای شبیه‌سازی داده‌های سری زمانی استفاده می‌کنیم. این مدل تصادفی رفتار فیزیکی داده‌ها را در نظر می‌گیرد. در نهایت، یک برآورد خوب برای قیمت‌های شبیه‌سازی شده شرکت‌های سیمان ارومیه، ساپیا آذین و پالایش نفت تهران به دست می‌آوریم. این مقاله بدین صورت سازمان‌دهی شده است. در بخش دوم، پیشینه پژوهش ارائه شده است. در بخش سوم، روش‌شناسی پژوهش که قسمت اصلی مقاله است، بررسی می‌شود. مدل ارنشتاین اولنبک ترکیبی گاما و تخمین پارامترهای آن در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرند. یافته‌های پژوهش شامل شبیه‌سازی و نتایج عددی مربوط به بازارهای بورس سیمان ارومیه، ساپیا آذین و پالایش نفت تهران در بخش چهارم مطرح می‌شود. در بخش انتهایی نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار این مقاله بیان می‌شود.

پیشینه پژوهش

وجود بازار سرمایهٔ فعال و پویا، یکی از نشانه‌های توسعه‌یافتگی کشورها در سطح بین‌المللی در نظر گرفته می‌شود، زیرا در اغلب کشورهای توسعه یافته، بازار سرمایه یکی از بسترهای اقتصادی بسیار مهم برای سرمایه‌گذاری و تأمین مالی شرکت‌ها و بنگاه‌های اقتصادی به شمار می‌رود. به همین دلیل، پرداختن به مسائل مربوط به آن بسیار حائز اهمیت است (راعی، باجلان و عجم، ۱۴۰۰). در سال‌های اخیر علاقه به استفاده از مدل‌های ریاضی به‌منظور پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی، به‌طور چشمگیری افزایش یافته است. معادلات دیفرانسیل تصادفی جزء بهترین مدل‌ها برای مدل‌سازی بازارهای مالی است؛ زیرا به‌دلیل داشتن عامل تصادفی، می‌توانند تأثیر عوامل اقتصادی و سیاسی را در مدل لحاظ کنند (فرنوش، نباتی و عزیزی، ۱۳۹۵). از جمله معروف‌ترین این معادلات مدل‌های بازگشت به میانگین است که می‌توانند به‌عنوان خاصیتی تعریف شوند که همیشه به یک سطح معین ثابت یا متغیر زمانی خاص با واریانس محدود در اطراف آن برگردند. اولین توصیف فرایند بازگشت به میانگین را ارنشتاین و اولنبک ارائه شد. این فرایند با محور لوی به‌عنوان فرایند غیرگاوسی اولین بار توسط بارندرف و شفارد (۲۰۰۰) مطرح شد تا نوسان‌های بازارهای مالی را توصیف کند. بعد از آنها تحقیقات گسترده زیادی در زمینه این معادلات و برآورد پارامترهای آنها توسط محققان صورت گرفت که از جمله آنها می‌توان به پژوهش‌های والدیوسو، شاتن و تورلینک[2] (۲۰۰۹)، اسپیلوپولس[3] (۲۰۰۹)، ماریانی، معصوم و تونبو[4] (۲۰۱۸)،

1. Rubio & Johansen
2. Valdivieso, Schoutens, & Tuerlinckx
3. Spiliopoulos
4. Mariani, Masum, & Tweneboah

رائو و تافر[1] (۲۰۱۹) و سابینو و پترونی[2] (۲۰۲۰) اشاره کرد. در دهه‌های اخیر، همسو با پژوهش‌های خارجی صورت گرفته، شاهد پژوهش‌های داخلی هرچند اندک در موضوع مدل‌سازی بازارهای مالی با استفاده از رویکرد تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی بوده‌ایم که در ادامه به چند نمونه از آنها اشاره شده است. نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون به مدل‌سازی شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. رحمانی و جعفریان (۱۳۹۶) با معرفی توان هرست به عنوان شاخصی از حافظه بلندمدت در روند قیمت سهام، مدل بلک شولز کسری متکی به حرکت براونی کسری با پارامتر هرست را ارائه نمودند. راعی، باسخا و مهدی‌خواه (۱۳۹۹) با استفاده از مدل Mean-CVAR به بهینه‌سازی سبد سهام پرداختند. نتیجه جالب مقاله ایشان نشان داد با در نظر گرفتن ناهم‌سانی واریانس موجود در بازار ایران و وارد کردن این موضوع در مدل‌های بهینه‌سازی، عملکرد بهتری در بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری حاصل می‌شود. حسینی ابراهیم‌آباد، حیدری، جهانگیری و قائمی اصل (۱۳۹۸) با استفاده از رویکرد بیزی به شبیه‌سازی تصادفی مدل‌های گارچ با توزیع‌های چند متغیره چوله پرداختند. ایشان به این نتیجه رسیدند که شوک‌های وارد بر متغیرها، هم‌بستگی بین آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهند. مدل جدیدی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی با معرفی مدل تلاطم تصادفی هستون با در نظر گرفتن فرایند پرش توسط جنابی و دهمره قلعه‌نو (۱۳۹۸) ارائه شد. ایشان با اضافه کردن جمله پرش به مدل هستون به مدل‌سازی تغییرات ناگهانی در بازار مالی پرداختند. ولیدی، نجفی و ولیدی (۱۳۹۹) با استفاده از مدل بازگشت به میانگین چند دوره‌ای که مبنای الگوریتم‌های تبعیت از بازنده است از یک تکنیک یادگیری برای بهینه‌سازی پرتفو بهره بردند تا پرتفوی دوره آتی را مشخص کنند.

روش‌شناسی پژوهش

در این قسمت، مدل ارنشتاین اولنبک با نویز لوی را معرفی می‌کنیم. فرایندهای تصادفی و لوی نقش اساسی را در امور ریاضی مالی و همچنین سایر زمینه‌های علمی مانند فیزیک (آشفتگی)، مهندسی (ارتباطات از راه دور، سدها)، علوم آماری (بیمه ریسک) و امور دیگر ایفا می‌کنند.

تعریف ۱. یک فرایند تصادفی روی $\mathbb{R}^n$ مانند $\{X_t\}_{t\in[0.T]}$ را فرایند لوی می‌گوییم که در شرایط زیر صدق کند (گریگوریو[3]، ۲۰۰۲).

الف) برای هر انتخاب $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n .n > 0$، متغیرهای تصادفی زیر مستقل باشند؛ یعنی فرایند دارای نموهای مستقل باشد. $X_{t_0}.X_{t_1} - X_{t_0}.X_{t_2} - X_{t_1}.\cdots.X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$

ب) $X_0 = 0$.

پ) توزیع $X_{s+t} - X_s$ به s وابسته نباشد؛ یعنی فرایند دارای نموهای مانا باشد.

د) فرایند به‌طور تصادفی پیوسته باشد.

1. Rao & Taufer
2. Sabino & Petroni
3. Grigoriu

ه) برای هر $\omega \in \Omega$، $X_t(\omega)$ برای $t \leq 0$ از راست پیوسته و برای $t > 0$ دارای حد چپ باشد.

تعریف ۲. توزیع متغیر تصادفی X را بی نهایت تقسیم‌پذیر گویند هرگاه برای هر $n = 1.2. ...$ متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل از هم $X_1^{(n)}.\cdots.X_n^{(n)}$ چنان موجود باشند که $X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$ هم توزیع با X باشد (گریگوریو، ۲۰۰۲).

قضیهٔ زیر یک رابطه بین فرایندهای لوی و توزیع‌های بی نهایت تقسیم‌پذیر را بیان می‌کند.

قضیه ۱. فرض کنید $\{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی باشد. در این صورت برای هر $t \geq 0$ فرایند $\{X_t\}_{t\geq 0}$ دارای توزیع بی‌نهایت تقسیم پذیر F است. برعکس، اگر F توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر باشد، آنگاه فرایند لوی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ موجود است؛ به‌طوری که توزیع X_1 توسط F داده شده است (گریگوریو، ۲۰۰۲).

فرض کنید $\phi_{X_t}(u)$ تابع مشخصه فرایند لوی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ باشد؛ یعنی $\phi_{X_t}(u) = \mathbb{E}\left(e^{-iuX_t}\right) = e^{i\psi(u)}$ که در آن $\psi_X(u) = \log(\phi(u))$. در این صورت $\psi(u)$ در رابطهٔ لوی ـ خینچین[1] زیر صدق می‌کند:

رابطه ۱
$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux} - 1 - iux\mathrm{I}_{|x|<1}\right)\nu(dx)$$

که در آن $\gamma \notin \mathbb{R}$، $\sigma^2 \geq 0$ و اندازه روی $\mathbb{R} - \{0\}$ است، به‌طوری‌که

رابطه ۲
$$\int_{-\infty}^{\infty}\inf(1, x^2)\nu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty}(1 \wedge x^2)\,\nu(dx) < \infty$$

از تجزیه لوی ایتو مشاهده می‌کنیم که در حالت کلی هر فرایند لوی از سه قسمت مستقل از هم تابع قطعی، قسمت براونی و قسمت پرش محض تشکیل شده است. می‌گوییم که توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر متناظر دارای یک سه‌گانه لوی به‌صورت $(\gamma.\sigma^2.\nu(dx))$ است. اندازه ν را اندازه لوی X گویند. با مقدمات مطرح شده دربارهٔ فرایند لوی، فرایند ارنشتاین اولنبک با نویز لوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این فرایندها با محور لوی، به‌عنوان فرایندهای غیرگاوسی ارنشتاین اولنبک شناخته می‌شوند (بارندرف و شفارد، ۲۰۰۱).

تعریف ۳. یک فرایند تصادفی مانا و غیرمنفی با زمان پیوسته $\{S_t\}_{t\geq 0}$ فرایندی از نوع ارنشتاین اولنبک است، اگر از سمت راست پیوسته، در هر نقطه دارای حد چپ و در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق کند (اکسندال[2]، ۲۰۱۰).

رابطه ۳
$$dS_t = -\lambda S_t dt + dZ_t . S_0 > 0 . \lambda \in \mathbb{R}^+$$

که در آن $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ فرایند لوی، λ پارامتر نرخ و عددی مثبت است.

فرایند $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ را فرایند استخراج شده توسط فرایند لوی یا محرک متناظر با S_t گوییم. محرک Z یک فرایند لوی پرش محض است. بنابراین رابطهٔ ۳ یک فرایند پرش است. فرایند لوی $\{Z_t\}_{t\geq 0}$، دارای تغییرات متناهی روی بازه

1. Levy-Khintchine
2. Oksendal

متناهی است. همچنین برای هر تابع پیوسته و خوش تعریف f، انتگرال $\int_0^t f\,(s) dZ_s$ موجود است. می‌توان نشان داد رابطهٔ ۳ دارای جواب تحلیلی زیر است (اکسندال، ۲۰۱۰).

رابطه ۴) $$S_t = e^{-\lambda t} S_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dZ_s$$

در ادامه این بخش، قسمت اصلی مقاله را ارائه می‌دهیم. نمودار قیمت نشان می‌دهد که نوسان‌های داده‌ها در طول زمان ثابت نیستند. این موضوع نشان‌دهندهٔ نوعی غیرایستایی در نوسان‌هاست و دوره‌های با نوسان بالا، تمایل به هم‌بستگی دارند. برای مدل‌سازی رابطهٔ ۴، به‌منظور ارائه قابلیت‌های تحلیلی فراوان و اطمینان از ساختارهای هم‌بستگی برای فرایند S_t، مجموع فرایندهای مستقل ارنشتاین اولنبک را در نظر می‌گیریم، یعنی

رابطه ۵) $$S_t = \sum_{i=1}^{m} w_i\, S_i e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} w_i\, e^{\lambda_i (t-s)} dZ_{\lambda_i s}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1$.

هدف از این کار به‌دست‌آوردن فرم پارامتری توزیع حاشیه‌ای رابطهٔ ۵ با دخیل بودن نویز لوی است. این کار با مشخص کردن توزیع فرایند لوی انجام می‌گیرد.

مدلی که دارای دو جز از مدل ۵ است، در قالب رابطهٔ ۶ تعریف شده است.

رابطهٔ ۶) $$S_t = w_1 S_t^1 + w_2 S_t^2 . w_1 + w_2 = 1$$

که هر جزء فرایند، یک فرایند ارنشتاین اولنبک مستقل با پارامترهای نرخ λ_1 و λ_2 است. در نتیجه داریم:

رابطهٔ ۷) $$S_t = w_1 {S_t}^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{\lambda_1 s}\, dZ_{\lambda_1 s} + w_2 {S_t}^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{\lambda_2 s}\, dZ_{\lambda_2 s}$$

با استفاده از تغییر متغیر می‌توانیم بنویسیم:

رابطهٔ ۸) $$S_t = w_1 {S_t}^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^{\lambda_1 t} e^{s}\, dZ_s + w_2 {S_t}^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^{s}\, dZ_s$$

که در آن $t \geq 0$, $\lambda_1 . \lambda_2 > 0$, ${S_t}^1 . {S_t}^2 > 0$.

برای ادامه هر چه بیشتر ترکیب مدل ارنشتاین اولنبک، به تعریف خود تجزیه‌پذیری زیر نیاز داریم.

تعریف ٤. یک توزیع احتمال P روی $\mathbb{R}$ را خود تجزیه‌پذیر[1] یا متعلق به کلاس لوی L گوییم، هرگاه برای هر $\lambda > 0$، توزیع احتمال P_λ روی $\mathbb{R}$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری‌که (کوفارو و سابینو[2]، ۲۰۱۷):

1. Self-decomposable
2. Cufaro-Petroni & Sabino

رابطهٔ ۹) $$\phi(\nu) = \phi_\lambda(\nu)\phi\left(e^{-\lambda}\nu\right). \nu \in \mathbb{R}$$

که در آن ϕ و ϕ_λ به‌ترتیب توابع مشخصه مربوط به متغیرهای تصادفی متناظر با احتمالات P و P_λ است. یک متغیر تصادفی S با کلاس لوی L را خودتجزیه‌پذیر می‌گوییم.

قضیه ۲. فرض کنید $\nu(dx)$ اندازه لوی، یک اندازه تقسیم‌پذیر P روی $\mathbb{R}$ باشد؛ آنگاه حالت‌های زیر معادل هستند (بارلو و همکاران[1]، ۱۹۹۲).

الف) P خود تجزیه‌پذیر است.

ب) توابع روی نیم‌خط مثبت توسط $\nu([e^s.\infty))$ و $\nu([-\infty.-e^s))$ هر دو محدب هستند.

پ) $\nu(dx)$ به فرم $\nu(dx) = u(x)dx$ است؛ به‌طوری که $|x|u(x)$ روی $(-\infty.0)$ افزایشی و روی $(0.\infty)$ کاهشی است.

اگر $u(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه شرط لازم و کافی (ب) می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

رابطهٔ ۱۰) $$u(x) + x'u(x) \leq 0. \forall x \neq 0$$

اگر چگالی لوی $u(x)$ دارای توزیع معلوم باشد، آنگاه رابطهٔ ۱۰ برای تعیین خودتجزیه‌پذیری مفید است. حال به تعریف تابع $k(s)$ به‌صورت زیر می‌پردازیم:

رابطهٔ ۱۱) $$k(s) = \nu\left([e^s.\infty)\right) = \int_{e^s}^{\infty} u\,(x)dx$$

از آنجایی که برای هر s، $k(s)$ محدب است پس $k''(s) \geq 0$ در نتیجه حالت‌های زیر برقرار می‌شود:

$$-e^s u(e^s) - e^{2s}u'(e^s) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -u(e^s) - e^s u'(e^s) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow u(e^s) + e^s u'(e^s) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow u(x) + xu'(x) \leq 0\ \forall x > 0$$

قضیه زیر ارتباطی بین خود تجزیه‌پذیری و فرایندهای لوی فراهم می‌کند.

قضیه ۳. اگر S خود تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه فرایند تصادفی مانا S و فرایند لوی Z_t وجود دارد؛ به‌طوری که $S_t \overset{d}{=} S$ و

رابطهٔ ۱۲) $$S_t = w_1 {S_t}^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t}\int_0^{\lambda_1 t} e^s\,dZ_s + w_2 {S_t}^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t}\int_0^{\lambda_2 t} e^s\,dZ_s$$

برعکس، اگر S_t یک فرایند تصادفی مانا و Z_t فرایند لوی باشد؛ به‌طوری که S_t و Z_t در رابطهٔ ۱۲ برای هر $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ صدق کند، آنگاه S خود تجزیه‌پذیر است؛ به‌طوری که $\underline{d}$ به‌معنای برابری در توزیع است (جورک و وروات[2]، ۱۹۸۳).

1. Barlev, Bshouty, & Letac
2. Jurek & Vervaat

مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(\mathrm{a.b})$

قانون مانایی مدل ارائه‌شده توسط توزیع $\Gamma(\mathrm{a.b})$ از رابطهٔ ۱۲ را در نظر بگیرید، که مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(\mathrm{a.b})$ را توضیح می‌دهد. از آنجایی که فرایند استخراج شده لوی از مدل ارنشتاین اولنبک ترکیبی توسط توزیع $\Gamma(\mathrm{a.b})$ که یک توزیع پواسن ترکیبی است، به‌دست می‌آید، در هر بازه زمانی فشرده تعداد محدودی از زمان‌ها را پرش می‌کند. بنابراین فرایند ارنشتاین اولنبک $\Gamma(\mathrm{a.b})$ ترکیبی، در هر بازه زمانی فشرده به تعداد متناهی بار دارای جهش است. جهت یادآوری، فرایند $\Gamma(a.b)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۵. فرایند تصادفی $X=\{X_t\}_{t\geq0}$ با پارامترهای a و b را فرایند گاما گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند (اسپیلوپولس، ۲۰۰۹):

الف) $X_0=0$.

ب) فرایند دارای نموهای مستقل باشد.

پ) فرایند دارای نموهای مانا باشد.

د) برای $s<t$، متغیر تصادفی $\mathrm{X_t}-\mathrm{X_s}$ دارای توزیع گاما $\Gamma(\mathrm{a(t-s).b})$ باشد. متغیرتصادفی x دارای توزیع گاما $\Gamma(a.b)$، با پارامترهای نرخ و مکان a و b است، هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f_X(x;a.b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}.\forall x>0$$ رابطهٔ ۱۳)

هدف ما تخمین پارامترهای b، a و λ_1 از رابطهٔ ۱۲ با استفاده از مشاهدات سری زمانی مدنظر است. قبل از تخمین پارامترها، یک اندازه لوی را بیان می‌کنیم.

اگر F_Z اندازه لوی $Z\,(1)$ باشد، فرض می‌کنیم که یک ثابت مانند M>0 وجود داشته باشد؛ به‌طوری که بـه ازای هر $|v|\leq M$ رابطهٔ $\int_{|x|>0}e^{vx}\,F_Z(dx)<\infty$ برقرار باشد.

تخمین پارامترهای مکان a و نرخ b از مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$

لم زیر گشتاور $\mathrm{Z(1)}$ را با گشتاور توزیع مانا $\{\mathrm{S_t}\}_{\mathrm{t}\geq0}$ مرتبط می‌کند.

لم ۱. فرض کنید $\{\mathrm{Z_t}\}_{\mathrm{t}\geq0}$ یـک فراینـد لـوی و M یـک ثابـت بـزرگ اسـت کـه در رابطـه فـوق صـدق مـی‌کنـد و $\lambda_1.\lambda_2>0$ و $\mathrm{var}(\mathrm{Z(1)})=\sigma^2<\infty$ و $(Z(1))=\mu<\infty$، آنگاه عبارت‌های زیر برقـرار مـی‌شـود (اسـپیلوپولس، ۲۰۰۹).

الف) $\mathrm{E(S_0)}=\mu$

ب) $\mathrm{var}(S_0)=\frac{\sigma^2}{2}$

از لم ۱، پارامترهای a و b مرتبط با μ و σ^2 به‌صورت زیر هستند:

رابطهٔ ۱۴)
$$a = \frac{2\mu^2}{\sigma^2} \text{ and } b = \frac{2\mu}{\sigma^2}$$

تخمین پارامتر شدت

به‌منظور برآورد پارامتر شدت λ_1، کار را با تعریف تابع خودهم‌بستگی برای فرایند داده شده در رابطهٔ ۸ شروع می‌کنیم که به‌صورت زیر است.

رابطهٔ ۱۵)
$$\rho(k) = w_1 e^{-\lambda_1|k|} + w_2 e^{-\lambda_2|k|}$$

از تابع خودهم‌بسته بیان شده در (رابطهٔ ۱۵) می‌توانیم پارامتر λ_1 را تخمین بزنیم. فرض کنید در رابطهٔ ۱۵ تساوی $\lambda_1 = \lambda_2$ برقرار باشد، در این صورت خواهیم داشت:

رابطهٔ ۱۶)
$$\rho(k) = w_1 e^{-\lambda_1|k|} + w_2 e^{-\lambda_2|k|}$$

رابطهٔ ۱۷)
$$\rho(k) = e^{-\lambda_1|k|}(w_1 + w_2)$$

بنابراین، $\lambda_1 = -\frac{\log\rho(k) - \log(w_1+w_2)}{k}$ خواهد بود.

بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $k = 1$. درنتیجه تخمین پارامتر λ_1 به صورت زیر است:

رابطهٔ ۱۸)
$$\hat{\lambda}_1 = -\log\rho(1) - \log(w_1 + w_2)$$

یافته‌های پژوهش

در این بخش، نحوه شبیه‌سازی چند سری زمانی مالی مربوط به بازارهای بورس ایران را با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده در بخش قبل، تحت مدل ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$ بررسی می‌شود. قیمت‌های روزانهٔ بازار بورس سهام را به‌عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی، $S_1.S_2.S_3., \dots, S_n$ در نظر بگیرید؛ به‌طوری که متغیر تصادفی S_1 مقدار داده شده سری را برای دوره زمانی اول نشان می‌دهد، متغیر S_2 قیمت را برای دوره زمانی دوم مشخص می‌کند، S_n مقدار آن را برای دوره زمانی nام بیان می‌کند. به‌طور کلی، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی، S_t نمایه شده توسط t به‌عنوان یک فرایند تصادفی شناخته می‌شود. این فرایند خصوصیت‌های داده‌هایی را نشان می‌دهد که با گذشت زمان به‌صورت تصادفی اتفاق می‌افتد.

روش شبیه‌سازی

در این بخش، به روش شبیه‌سازی مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$ می‌پردازیم که از یک فرایند لوی استخراج شده است. فرایند لوی استخراج شده برای مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$، یک فرایند پواسن ترکیبی است. در ادامه، شبیه‌سازی خود را بر اساس معادله دیفرانسیل تصادفی پیشنهادی زیر پایه‌گذاری خواهیم کرد:

رابطهٔ ۱۹)

$$S_t = w_1 {S_t}^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^{\lambda_1 t} e^s \, dZ_s + w_2 {S_t}^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^s \, dZ_s . S^1 . S^2 > 0 . \lambda_1 . \lambda_2 > 0 . t \geq 0$$

جواب معادله دیفرانسیل تصادفی از طریق فرایند لوی استخراج شده و با تقریب انتگرال‌های مربوطه شبیه‌سازی می‌شود.

شبیه‌سازی با استفاده از فرایند لوی استخراج شده

در ادامه، شبیه‌سازی مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(\mathrm{a.b})$ تشریح می‌شود. $\{\mathrm{S_t}\}_{\mathrm{t}\geq 0}$ در نقاط زمانی $\mathrm{n} = 0.1.2. , \ldots$ و $\mathrm{t} = \mathrm{n}\Delta\mathrm{t}$ به همراه فرایند لوی استخراج شده به‌صورت زیر است:

گام اول) شبیه‌سازی فرایند پواسن $\mathrm{N} = \{\mathrm{N_t}\}_{\mathrm{t}\geq 0}$ با پارامتر شدت λ.

گام دوم) محاسبه تعداد پرش‌ها در هر بازه فشرده.

گام سوم) نمونه‌گیری از مسیرهای مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$.

رابطه ۲۰)

$$S_{n\Delta t} = w_1 S_{n\Delta t} e^{-\lambda_1 \Delta t} + w_1 \sum_{N_{(n-1)\Delta t}+1}^{N_n \Delta t} \exp\left(-U_n \lambda \Delta t\right) + w_2 S_{n\Delta t} e^{-\lambda_2 \Delta t} + w_2 \sum_{N_{(n-1)\Delta t}+1}^{N_{n\Delta t}} \exp\left(-U_n \lambda \Delta t\right)$$

تذکر ۱. قسمت نمایی و اعداد تصادفی یکنواخت مستقل U_n در مجموع، اجازه می‌دهد تا پرش‌ها در هر بازه زمانی اتفاق بیفتد. برنامه‌نویسی به زبان متلب برای شبیه‌سازی فرایند گفته شده در بالا به کار گرفته می‌شود. حال، مسیرهای مستقل از مدل خود را با استفاده از مراحل زمانی مختلف شبیه‌سازی می‌کنیم.

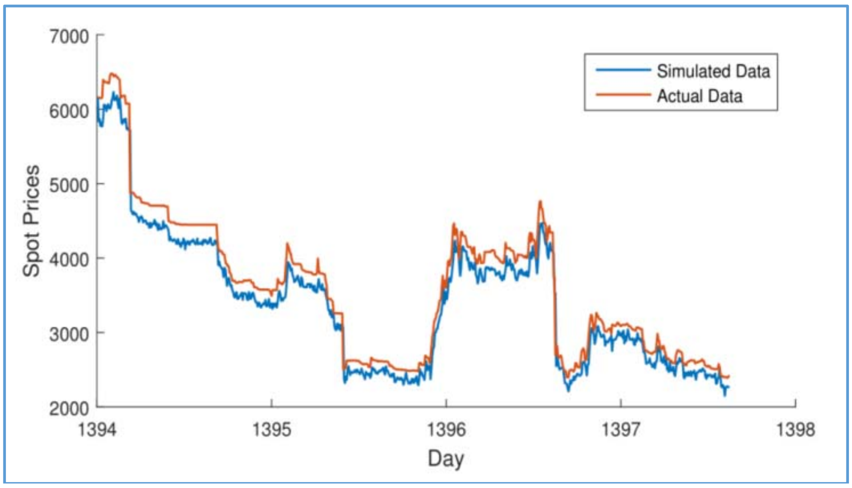
شبیه‌سازی با استفاده از داده‌های واقعی

در این بخش، رفتار سری زمانی مالی مربوط به چند بازار بورس ایران، به‌طور مختصر بررسی می‌شود. در این مطالعه، قیمت‌های بسته شده روزانه شاخص‌های سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران از سال ۱۳۹۴ تا ۱۳۹۸ در نظر گرفته شده است. از میان ارقام، مشاهده می‌کنیم که نوسان‌ها (یا تغییرپذیری) داده‌ها ثابت نیست و با گذشت زمان تغییر می‌کند. این نشانه‌ای از بی‌ثباتی احتمالی در نوسان‌هااست و دوره‌های نوسان بالا به هم‌بستگی میل می‌کنند. این هم‌بستگی خوشه‌بندی نوسان‌ها نامیده می‌شود. نکتهٔ مهمی که از نمودارها به دست می‌آید، پرش‌های قیمت است.

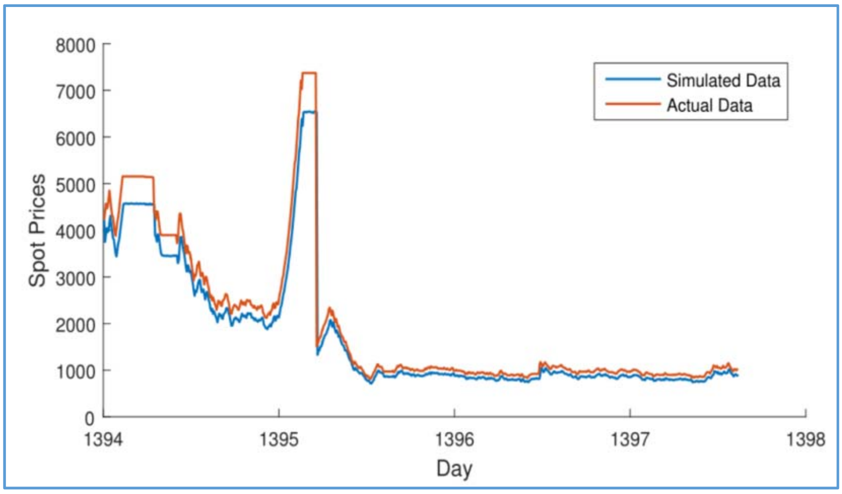
این پرش‌ها می‌توانند با استفاده از فرایند پواسن (همان‌طور که در شبیه‌سازی نیز آورده شده است) مدل شوند. در جدول ۱ نتایج عددی برای قیمت‌های بسته شده بورس‌های سیمان ارومیه، ساپیا آذین و پالایش نفت تهران تحت مدل ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$ درج شده است. برآورد پارامترهای λ_1 و λ_2 را با استفاده از معادلات داده شده به روش ماکزیمم درست‌نمایی در متلب به‌دست می‌آوریم تا متناسب با مدل ارنشتاین اولنبک $\Gamma(a.b)$ شود. با توجه به شکل‌های ۱، ۲ و ۳، داده‌های شبیه‌سازی‌شده با سری زمانی اصلی بسیار متناسب است. این موضوع در نتایج برآوردهای خطای میانگین مربعات در جدول ۱ نیز مشاهده می‌شود. برای بررسی تناسب مدل، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) را برای هر بورس کالا محاسبه کردیم. خطای میانگین مربعات اندازه‌گیری‌شده نشان می‌دهد که مدل ارائه‌شده به چه میزان با مجموعه داده‌های بازار متناسب است. در نقاط داده‌های سری‌های زمانی، واریانس موضعی سری زمانی، هنگامی بزرگ‌تر است که سطح سری بالاست. بنابراین مجموعه داده‌ها را با استفاده از لگاریتم داده‌های سری زمانی نرمال می‌کنیم. با انجام این تغییر مقیاس، می‌توان یک مدل متناسب شده را بعد از تحولات در نظر گرفت. دقت روش به‌کار رفته در مورد داده‌های پالایش نفت تهران نسبت به دو سری زمانی دیگر قابل توجه است.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی برای شاخص‌های مختلف

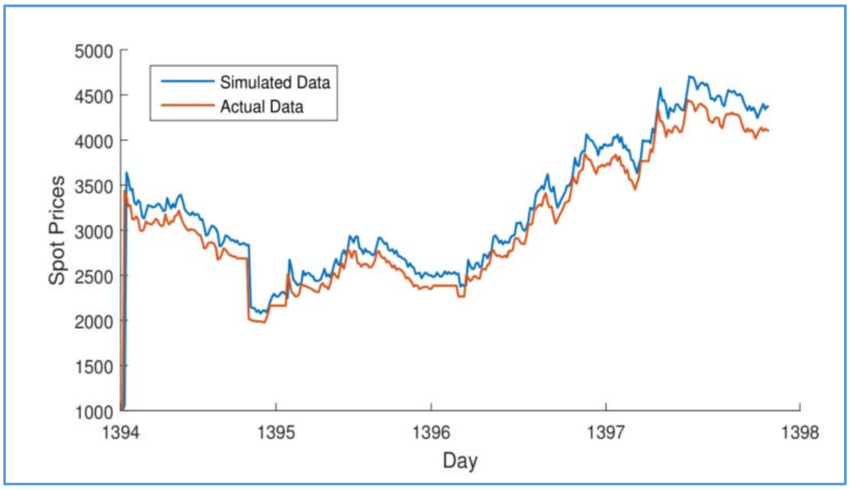
بورس سهام	$\lambda_۱$	$\lambda_۲$	$w_۱$		RMSE
سیمان ارومیه	۰/۰۰۹۹	۱/۲۳۲۸	۰/۲۲۸۶	۰/۷۷۱۳	۵/۷۳۵۱
ساپیا آذین	۰/۰۱۲۰	۲/۸۵۰۶	۰/۱۴۶۲	۰/۸۵۳۷	۱۰/۰۱۵
پالایش نفت تهران	۰/۰۴۰۲	۰/۰۴۰۹	۸۵۷/۲۱۶۷	−۸۵۶/۲۱۶۷	۰/۰۴۸۹



شکل ۱. مقایسه داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی ارزش روزانه شاخص سیمان ارومیه



شکل ۲. مقایسه داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی ارزش روزانه شاخص سایپا آذین



شکل ۳. مقایسه داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی ارزش روزانه شاخص پالایش نفت تهران

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، تکنیک جدیدی برای مدل‌سازی مجموعه‌ای از سری‌های زمانی مالی مانند بازارهای بورس سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران مورد مطالعه قرار گرفت. بدین منظور، یک معادله دیفرانسیل تصادفی که به‌صورت ترکیب دو فرایند مستقل ارنشتاین اولنبک با محرک $\Gamma(a.b)$ بود، برای شبیه‌سازی داده‌های سری زمانی به کار گرفته شد. مزیت این روش این است که برآوردهای به‌دست‌آمده، در اطراف مقدار واقعی پایدارند. همچنین خطاهای کم نشان می‌دهد که روش تخمین دقیق است. این مدل تصادفی به‌خوبی رفتار فیزیکی داده‌ها را در نظر می‌گیرد. نتایج عددی و نمودارها نشان دادند که مدل ارائه شده متناسب با داده‌های واقعی بازار است و می‌توان از آن برای پیش‌بینی قیمت‌های

آتی سهام، برای تجزیه و تحلیل بازار، طراحی نمونه‌کارها در سایر رشته‌ها مانند ژئوفیزیک، پزشکی و علوم اجتماعی بهره برد. مدل‌های نوسان تصادفی، زمانی‌که واریانس فرایند تصادفی خود به‌صورت تصادفی توزیع شده است، بسیار کارآمد هستند و در شاخه‌ای از ریاضیات مالی برای ارزیابی اختیارات، بازده و قیمت‌های بسته شده بازار سهام استفاده می‌شوند. از این رو، در ادامهٔ کار این مقاله، می‌توان برای پیش‌بینی نوسان‌ها، از مدل نوسان‌های تصادفی روی داده‌هایی که از مدل ارنشتاین اولنبک ترکیبی تبعیت می‌کنند، استفاده کرد. در نظر گرفتن مدل‌های رژیم سوئیچینگ، مدل‌هایی که نوسان یا نرخ بهره آنها از مدل‌های تصادفی چون CIR یا هال وایت پیروی می‌کنند نیز، می‌توانند در آینده بررسی شوند. همچنین، قیمت‌گذاری مشتقات (اختیار، انواع قراردادها و...) از مواردی است که برای مطالعه پیشنهاد می‌شود.

منابع

جنابی، امید؛ دهمره قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری پرشی. *تحقیقات مالی*، ۲۱(۳)، ۳۹۲-۴۱۶.

حسینی ابراهیم آباد، سید علی؛ حیدری، حسن؛ جهانگیری، خلیل؛ قائمی اصل، مهدی (۱۳۹۸). استفاده از رویکرد بیزی برای مطالعه همبستگی متغیر با زمان میان شاخص‌های منتخب بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۱(۱)، ۵۹-۷۸.

راعی، رضا؛ باجلان، سعید؛ عجم، علیرضا (۱۴۰۰). بررسی کارایی مدل 1/N در انتخاب پرتفوی. *تحقیقات مالی*، ۲۳(۱)، ۱-۱۶.

راعی، رضا؛ باسخا، حامد؛ مهدیخواه، حسین (۱۳۹۹). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از روش Mean-CVar و رویکرد ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن. *تحقیقات مالی*، ۲۲(۲)، ۱۴۹-۱۵۹.

رحمانی، مرتضی؛ جعفریان، ناهید (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه‌های معاملاتی. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸(۳۲)، ۴۳-۶۲.

فرنوش، رحمان؛ نباتی، پریسا؛ عزیزی، معصومه (۱۳۹۵). شبیه‌سازی و پیش‌بینی قیمت نفت اوپک با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی. *پژوهش‌های نوین در ریاضی*، ۲(۷)، ۲۱-۳۰.

نیسی، عبدالساده؛ پیمانی، مسلم (۱۳۹۳). مدل سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. *پژوهشنامه اقتصادی*، ۱۴(۵۳)، ۱۴۳-۱۶۶.

ولیدی، جواد؛ نجفی، امیرعباس؛ ولیدی، علیرضا (۱۳۹۹). انتخاب برخط سبد سرمایه‌گذاری به کمک الگوریتم‌های تبعیت از بازنده. *تحقیقات مالی*، ۲۲(۳)، ۴۰۸-۴۲۷.

References

Barlev, S., Bshouty, D. & Letac, G. (1992). Natural exponential families and selfdecomposability, *Statistics and probability letters*, 13, 147-152.

Barndorff-Nielsen, O. & Shephard, N. (2000). Financial volatility, *Lévy processes and power variation.*

Barndorff-Nielsen, O. & Shephard, N. (2001). Non-Gaussian Ornstein - Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society*, 63, 167-241.

Breidt, C. & Lima, D. (1998). The detection and estimation of long memory in stochastic volatility models, *J. Econometrics*, 83, 325-348.

Brockman, P. & Chowdhury, M. (1997). Deterministic versus stochastic volatility: implications for option pricing models. *Applied Financial Economics*, 7, 422-505.

Comte, F. & Renault, E. (1998). Long memory in continuous time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4), 291-323.

Cufaro-Petroni, N. & Sabino, P. (2017). Coupling Poisson processes by self-decomposability. *Mediterranean J Math*. 14(2):69.

Franoosh, R., Nabati, P. & Azizi, M. (2016). Simulating and Forecasting OPEC Oil Price Using Stochastic Differential Equations, *Journal of new researches in mathematics,* 2(7), 21-30. (*in Persian*)

Grigoriu, M. (2002). Stochastic Calculus*, Springer*.

Harvey, A. C. (1998). Long-memory in stochastic volatility. *Butterworth - Heinemann*, 307-320.

Hoseini Ebrahimabad, S. A., Heydari, H., Jahangiri, Kh., Ghaemi Asl, M. (2019). Using Bayesia Approach to Study the Time Varying Correlation among Selected Indices of Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 21(1), 59-78. (*in Persian*)

Jenabi, O. & Dahmarde Ghaleno, N. (2019). Subordinate Shares Pricing under Fractional-Jump Heston Model. *Financial Research Journal*, 21(3), 392- 416. (*in Persian*)

Jurek, Z. J. & Vervaat, W. (1983). An integral representation for self decomposable Banach space valued random variables, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeisheorie and verwandte Gebiete*, 62, 247-262.

Mariani, M., Masum, B. & Tweneo, O. (2018). Estimation of stochastic volatility by using Ornstein–Uhlenbeck type models. *Physica A: Statistical mechanics and its application,* 491, 167-176.

Nisi, A. & Peymani, M. (2014). Modeling the index of Tehran Stock Exchange using Heston's stochastic differential equation. *Economic Research*, 14 (53), 166-143. (*in Persian*)

Oksendal, B. (2010). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York.

Raei, R., Bajalan, S. & Ajam, A. (2021). Investigating the Efficiency of the 1/*N* Model in Portfolio Selection. *Financial Research Journal*, 23(1), 1-16. (*in Persian*)

Raei, R., Basakha, H. & Mahdikhah, H. (2020). Equity Portfolio Optimization Using Mean-CVaR Method Considering Symmetric and Asymmetric Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Financial Research Journal*, 22(2), 149-159. (*in Persian*)

Rahmani, M., Jafarian, N. (2017). Survey on fractional Black-sholes with hurst exponent on European option with transaction cost. *Financial Engineering and Portfolio Management*. 8(32), 43-62. (*in Persian*)

Rao, J. & Taufer, E. (2019), Semi-parametric estimation of the autoregressive parameter in non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck processes. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 1-23.

Rubio, F. J. & Johansen, A. M. (2013). A simple approach to maximum intractable likelihood estimation. *Electronic Journal of Statistics*, 7, 1632-1654.

Sabino, P. & Petroni, N. C. (2020). Gamma-related Ornstein–Uhlenbeck processes and their simulation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(6), 1108-1133.

Spiliopoulos, K. (2009). Method of Moments Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by General Levy Process. *ANNALES de l'I.S.U.P.*, 53, 3-19.

Taylor, S. (1992). Financial returns modeled by the product of two stochastic processes, A study of daily sugar prices, *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1, 203-226.

Tweneboah, O. K. (2015). Stochastic differential equation applied to high frequency data arising in geophysics and other disciplines. *ETD Collection for University of Texas*, El Paso Paper AA11600353.

Valdivieso, L., Schoutens, W., & Tuerlinckx, F. (2009). Maximum likelihood estimation in processes of Ornstein-Uhlenbeck type, *Stat Infer Stoch Process*, 12, 1-19.

Validi, J., Najafi, A. A., & Validi, A. (2020). Online Portfolio Selection Based on Follow-the-Loser Algorithms. *Financial Research Journal*, 22(3), 408-427. (*in Persian*)