Archive of SID.ir

E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 8, No. 3 (2023) 814–831.



Paper Type: Original Article

Returns to Scale in Decision-Making Units with Integer-Valued or Mixed Inputs and Integer-Valued or Real Outputs Using Radial Models in Data Envelopment Analysis

Zeinab Tavassoli[1], Mohsen Rostami MalKhalifeh[1], Farhad Hosseinzadeh Lotfi[1,*], Tofigh Allah Vieanloo[1]

[1] *Department of Applied Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; tavassoli.zeinab1393@gmail.com; mohsen_rostamy@yahoo.com; farhad@hosseinzadeh.ir; allahviranloo@yahoo.com.*

Citation:

Tavassoli, Z., Rostami Malkhalifeh, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Allah Vieanloo, T. (2023). Returns to scale in decision-making units with integer-valued or mixed inputs and integer-valued or real outputs using radial models in data envelopment analysis. *Journal of decisions and operations research, 8*(3), 814-831.

Received: 16/06/2022 Reviewed: 17/07/2022 Revised: 09/08/2022 Accepted: 01/10/2022

Abstract

Purpose: The current paper tries to determine the type of returns to scale in a decision-making unit under the condition that integer-valued inputs or outputs are present.

Methodology: This paper introduces radial models for determining the value and type of Returns to Scale (RTS) in 4 scenarios, including single integer-valued input – single real output (scenario one), mixed inputs – exclusively real outputs (scenario two), exclusively integer-valued inputs – exclusively real outputs (scenario three), and exclusively integer-valued inputs – exclusively integer-valued outputs (scenario four); in each scenario, the values of the left RTS and right RTS are determined, and the RTS type is then determined on that basis. Finally, by presenting three examples based on two scenarios, namely single integer-valued input – single real output and single integer-valued input – single integer-valued output, the new method is compared with previous methods using GAMS software, and the conclusions are provided.

Findings: The type of returns to scale differs when integer-valued inputs or outputs are present as compared with the case where the inputs and outputs are assumed to have real values.

Originality/Value: This study focuses on the value and type of returns to scale for integer-valued data. For this purpose, returns to scale was modeled in 4 scenarios using input-oriented radial models, and in the fourth scenario (exclusively integer-valued inputs – exclusively integer-valued outputs), the modeling was carried out for output orientation as well. The existence of a difference between the results produced by our proposed model and those of the classical model was demonstrated through two examples, one using hypothetical data and the other real-world data.

Keywords: Data envelopment analysis, Integer-valued data, Left returns to scale, Right returns to scale.

Corresponding Author: farhad@hosseinzadeh.ir

Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۸، شماره (۳)، (۱۴۰۲)، ۸۳۱-۸۱۴

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

بازده به مقیاس واحدهای تحت ارزیابی با ورودی صحیح یا ورودی ترکیبی و خروجی حقیقی یا صحیح به کمک مدل‌های شعاعی در تحلیل پوششی داده‌ها

زینب توسلی[۱]، محسن رستمی مال خلیفه[۱]، فرهاد حسین‌زاده لطفی[۱*]، توفیق الله ویرانلو[۱]

[۱]گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ایران.

چکیده

هدف: این مقاله به تشخیص نوع بازده به مقیاس یک واحد تصمیم‌گیرنده با شرط وجود ورودی یا خروجی صحیح مقدار پرداخته است.

روش‌شناسی پژوهش: این مقاله به معرفی مدل‌های شعاعی برای تعیین مقدار و نوع بازده به مقیاس در چهار حالت: تک‌ورودی صحیح- مقدار - تک‌خروجی حقیقی‌مقدار(حالت اول)، ورودی‌ها ترکیبی - همه خروجی‌ها حقیقی‌مقدار (حالت دوم)، همه ورودی‌ها صحیح‌مقدار - همه خروجی‌ها حقیقی‌مقدار (حالت سوم) و همه ورودی‌ها صحیح‌مقدار- همه خروجی‌ها صحیح‌مقدار (حالت چهارم) پرداخته‌است. در حالت چهارم ماهیت خروجی نیز بررسی شده است. در هر حالت مقدار بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست تعیین و با توجه به آن نوع بازده به مقیاس مشخص شده است. در انتها با ۳ مثال در دو حالت تک‌ورودی صحیح‌مقدار- تک‌خروجی حقیقی‌مقدار و تک‌ورودی صحیح‌مقدار- تک‌خروجی صحیح‌مقدار به مقایسه روش جدید و روش‌های قبلی با استفاده از نرم‌افزار *GAMS* پرداخته و نتیجه‌گیری شده است.

یافته‌ها: نوع بازده به مقیاس در حالتی که ورودی یا خروجی صحیح‌مقدار وجود دارد، متفاوت با حالتی است که ورودی و خروجی را حقیقی‌مقدار فرض می‌کنند.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: در این مقاله به تعیین مقدار و نوع بازده به مقیاس برای داده‌های صحیح توجه شده است. به این منظور بازده به مقیاس در چهار حالت به کمک مدل‌های شعاعی در ماهیت ورودی مدل‌سازی گردیده و در حالت چهارم (همه ورودی‌ها صحیح‌مقدار - همه خروجی‌ها صحیح‌مقدار) مدل‌سازی در ماهیت خروجی نیز موردبررسی قرار گرفته است. وجود تفاوت در نتایج حاصل از مدل پیشنهادی و مدل کلاسیک با مثال با داده فرضی و مثال با داده واقعی نشان داده شده است.

کلیدواژه‌ها: بازده به مقیاس چپ، بازده به مقیاس راست، تحلیل پوششی داده‌ها ، داده‌های صحیح.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها اولین‌بار با معرفی مدل‌های *CCR* و *BCC* برای اندازه کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری، معرفی شده است [1]، [2] . بازده به مقیاس، (یکی از شاخص‌های مهم در تحلیل پوششی داده‌ها) بیانگر پیوند بین تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های یك سیستم است. یکی از توانایی‌های روش تحلیل پوششی داده‌ها، کاربرد الگوهای مختلف متناظر با بازده به مقیاس‌های متفاوت و همچنین اندازه گیری بازده به مقیاس واحدهاست [3]. بنکر [4] در بحث بازده به مقیاس نشان داده است که چطور فرمول‌های *CCR* می‌توانند برای تخمین *MPSS* وبازده به مقیاس به‌کار گرفته شوند؛ بنکر و ترال [5] مدل‌هایی ارایه داده‌اند که با تخمین تجربی مرز و تحت حالت کلی جواب‌های

* نویسنده مسئول

farhad@hosseinzadeh.ir

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

غیر منحصربه‌فرد بازده به مقیاس را محاسبه می‌کند. همچنین بنکر و همکاران [6] سال‌ها بعد به محاسبه بازده به مقیاس و تعیین نوع آن در مدل‌های مختلف (*BCC,CCR* در ماهیت ورودی و مضربی[1] در ماهیت خروجی و جمعی[2]) پرداختند.

گولانی و گینگ [7] با استفاده از *BCC* در دو ماهیت بازده به مقیاس را محاسبه می‌کنند. فوکویاما [8] کران‌های بالا و پایین کشش مقیاس را به‌دست آورده است و در مورد نوع کشش مقیاس و چگونگی این نتیجه‌گیری با استفاده از مقدار کمی، بحث می‌کند. جهانشاهلو و همکاران [9] در مقاله‌ای روشی برای شناسایی مرز کارایی معرفی می‌کنند. سپس، اندازه بازده به مقیاس[3] و مشخصه‌های *DMU*[4] را با استفاده از معادله مرز کارآیی تولید مشخص می‌کنند. اللهیار و رستمی مال‌خلیفه [10] برآورد بازده به مقیاس در تجزیه‌وتحلیل پوششی داده‌ها (*DEA*)، ارایه‌شده توسط گولانی را بررسی نمودند و روش جدیدی را برای انجام این برآورد ارایه می‌دهند. آن‌ها نشان می‌دهند که روش جدید کاستی روش قبلی را ندارد؛ علاوه براین، قادر است در هر شرایطی بازده به مقیاس را در سمت راست و چپ واحد داده‌شده ارزیابی کند. همچنین در مقاله‌ای دیگر [11] نسبت به محاسبه بازده به مقیاس داده‌های منفی اقدام کرده و مدلی پیشنهاد داده‌اند. امیدی و همکاران [12] در مقاله‌ای به ارایه روشی برای ارزیابی بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ *L-RTS*[5] و *R-RTS*[6] می‌پردازند. مدل‌های این روش پیشنهادی، خطی بوده و در مورد آن‌ها مشکل پارامتری‌بودن، وجود ندارد؛ علاوه براین، مدل‌های روش پیشنهادی از این مزیت برخوردارند که با انجام تغییرات جزیی روی آن‌ها و با تقسیم‌بندی مرز مجموعه امکان تولید، توانسته از آن‌ها به‌عنوان ابزاری برای ارزیابی امتداد پایداری *RTS* واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده کنند. دانشور و آدسینا [13] یک مدل اصلاح‌شده توپولوژی بازده به مقیاس متغیر مناسب در فرآیند پارامتر قوی به‌کار می‌برند تا مشکل روش‌های قبلی شبکه عصبی با مدل‌های ضعیف و تبعیض‌آمیز با عدم توانایی در تنظیم برای انتخاب سطح بهینگی را حل کنند. همچنین صالح [14] الگوریتم جدیدی برای تعیین بازده به مقیاس شبکه‌های دومرحله‌ای بیان نموده است. مطالعه‌های موردی هم درزمینه بازده به مقیاس ارایه شده است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

قمر و همکاران [15] کارایی و بازده به مقیاس را در استفاده از منابع کشت خیار خارج از فصل در پنجاب پاکستان، بررسی می‌کنند. سیتومورنگ [16] برای تعاونی ذخیره مالی اندونزی که تجارت درزمینه سرویس‌های مالی است، تابع تولید را مشخص نمود و سپس اقدام به بررسی عملکرد آن با استفاده از کشش مقیاس و بازده به مقیاس و فاکتورهای کشش تولید، کرده است. سیژوسکی و همکاران [17] با آنالیزهایی که انجام داده‌اند، نشان دادند که چطور تغییر فرض *CRS* بر اثربخشی سیاست محیطی اثرگذار است و درواقع با یک مثال در لهستان به دنبال نشان دادن تغییر چشم‌اندازهای سیاستی با استفاده از بازده به مقیاس کاهشی بودند.

همه این مقاله‌ها به بررسی بازده به مقیاس پرداخته‌اند ولی به صحیح‌بودن داده‌ها توجهی نشان نداده‌اند. نتایج مدل‌های ارایه شده تا زمانی که داده‌ها غیرصحیح باشند دارای اعتبار هستند؛ هرچند که از سال ۲۰۰۶، صحیح‌بودن داده‌ها در مدل‌های *DEA* موردتوجه قرار گرفته است اما بررسی بازده به مقیاس *DMU* با داده صحیح، تاکنون موردبررسی قرار نگرفته است. از سال ۲۰۰۶، به داده‌های صحیح توجه ویژه‌ای شد و تلاش برای رفع اشکال‌هایی که ناشی از تقریب‌زدن و گردکردن اعداد بود، قوت گرفت.

لوزانو و ویلا [18] به معرفی مفاهیم جدید و مدل‌هایی که به‌طور صریح نگاهی به ورودی و خروجی صحیح دارند، پرداختند. سپس کاسمن و کاظمی متین [19] نواقص مدل اصلاح‌شده را رفع و مفاهیم جدید را در *DEA* صحیح تعریف کردند و یک مدل برای *MILP*[7] استخراج شد. در همان سال کاظمی متین و کاسمن [20] مفهوم تحدب طبیعی را بیان کرده و مدل جدیدی برای تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر ارایه داده‌اند. بعدازآن مدل‌های صحیح چند هدفه معرفی می‌شوند. خضری مطلق و همکاران [21] و خضری مطلق [22] به اصلاح مدل‌ها پرداختند.

ژو و همکاران [23] هرچند مستقیم از مدل‌های داده صحیح استفاده نکرده‌اند، اما به لزوم توجه به اعداد صحیح اشاره و از مدل مضربی استفاده نموده‌اند، آنان ضمن بررسی مسائل مربوط به هوای چین و درنظر گرفتن خروجی‌های مطلوب و نامطلوب و معرفی تابع هدف با عنوان مجموع سود صفر به‌طوری‌که تبادل بین خروجی‌ها مطلوب و نامطلوب صورت بگیرد و به سمت مطلوب پیش برود، مدل خود را معرفی کردند. رن و همکاران [24] نیز در زمینه داده‌های صحیح و نامطلوب ولی فازی کار کرده و مدل خطی پیشنهاد داده‌اند. چن و

[1] Multiplicative
[2] Additive
[3] Returns to Scale (RTS)
[4] Decision Making Unit (DMU)
[5] Left Returns to Scale (L-RTS)
[6] Right Returns to Scale (R-RTS)
[7] Mixed Integer Linear Programming (MILP)

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

همکاران [25] نیز به ارایه مدل برای ابرکارایی با داده‌های نامطلوب و سپس اصلاح آن برای داده‌های صحیح پرداخته‌اند. حسینی منفرد و همکاران [26] در بررسی کارایی شبکه‌های دومرحله‌ای به داده‌های صحیح توجه نشان دادند و بر این اساس محاسبه اندازه کارایی را مدل سازی کردند.

طالب و راملی [27] بازده به مقیاس را بر روی یک مدل *DEA* ماهیت خروجی صحیح مقدار بحث می‌کنند تا نوع بازده به مقیاس (افزایشی، کاهشی و ثابت) را مشخص نمایند که با دسته‌بندی امتیاز کارایی حاصل از مدل *DEA* مقادیر صحیح ماهیت خروجی تحت فرض بازده به مقیاس ثابت و بازده به مقیاس متغیر تعیین می‌گردد. یافته‌ها تحت دو تکنولوژی برای داده‌های تجربی دانشگاه‌های عمومی مالزی به‌کار گرفته شده است. همچنین طالب و همکاران [28] یک مدل چند هدفه برای داده‌های صحیح نامطلوب معرفی می‌کنند و تابع هدف را هم صحیح درنظر می‌گیرند. مدل پیشنهادی، بازده به مقیاس واحدها را با کاهش ورودی و افزایش خروجی تخمین می‌زنند. توانایی و مفیدبودن این مدل پیشنهادی با داده‌های ۳۹ فرودگاه اسپانیا بررسی می‌شود و درنهایت با ۳ مدل چندهدفه که قبلا اعتبارش تست شده‌است مقایسه می‌گردد. مقاله‌هایی که داده‌های صحیح و شاخص‌های *DEA* را بررسی نموده‌اند، هیچ‌کدام به بررسی شاخص بازده به مقیاس با توجه به داده‌های صحیح نپرداخته‌اند. مساله ایجاد شده بدین‌صورت است: با فرض این که مدل‌های قبلی، نوع بازده به مقیاس را درست تشخیص بدهد در مواردی که مدیر باید درنهایت برای افزایش یا کاهش ورودی یا خروجی تصمیم بگیرد. مدل‌های قبل، مقدار درست را مشخص نمی‌کنند و ممکن است یک داده غیرصحیح را برای مدیر مشخص نمایند که مدیر مجبور به تقریب یک عدد به مقدار صحیح شود. این تقریب می‌تواند درنتیجه نهایی تاثیر منفی بگذارد. در مثال‌های این مقاله خواهید دید، مدل‌های قبلی چون توجهی به صحیح بودن داده‌ها نداشت، نوع بازده به مقیاس را به‌درستی مشخص نمی‌کرد. به‌عنوان مثال وقتی مدل‌های قبلی بازده به مقیاس را افزایشی تشخیص می‌دهند، مدیر انتظار دارد در مقابل افزایش یک واحد ورودی به مقدار بیش‌تری خروجی افزایش پیدا کند. درصورتی‌که بازده به مقیاس ثابت یا بازده به مقیاس کاهشی بوده است و در مقابل یک واحد افزایش ورودی، خروجی نیز یک واحد افزایش پیدا می‌کند ثابت یا بازده به مقیاس کاهشی بوده است و در مقابل یک واحد افزایش ورودی، خروجی نیز یک واحد افزایش پیدا می‌کند یا دیگر واحد تحت ارزیابی کشش افزایش ورودی را ندارد و خروجی را کم‌تر از یک واحد افزایش می‌دهد.

مقاله حاضر در پی رفع این مشکل برآمده و به بررسی بازده به مقیاس *DMUs* با داده‌های صحیح پرداخته است و مشخصا روی چهار حالت واحدهایی با تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی، یا ورودی صحیح و غیرصحیح (ترکیبی)-خروجی حقیقی و ورودی‌های صحیح- خروجی‌های حقیقی و همه‌ی ورودی‌های صحیح- همه‌ی خروجی‌های صحیح در ماهیت ورودی و حالت چهارم در ماهیت خروجی کار شده است و مدل مناسب هر حالت پیشنهاد می‌شود. بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست هر واحد در هر حالت مجزا بررسی می‌گردد.

در این مقاله بحث بدین‌صورت دنبال می‌شود: قسمت دو مقدمات و مفاهیم اولیه داده‌های صحیح و بازده به مقیاس، قسمت سه مدل‌های پیشنهادی و تعاریف جدید بازده به مقیاس در هر چهار حالت (حالت چهارم در دو ماهیت)، در قسمت چهار، یک مثال در حالت تک-ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی و یک مثال با داده‌های فرضی با تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی صحیح بیان شده است. نتایج مدل پیشنهادی با نتایج مدل کلاسیک مقایسه می‌گردد. همچنین به بررسی یک مثال با داده‌های واقعی و مقایسه آن با نتایج به‌دست‌آمده با مدل‌های قبلی می‌پردازد و پس از نتیجه‌گیری، پیشنهاد ارایه می‌دهد.

۲- مفاهیم مقدماتی

۲-۱- مروری بر تکنولوژی داده‌های صحیح

فرض کنید برای هر $DMU_j , j = 1,2,\dots,n$ که m ورودی برای تولید s خروجی به‌کار می‌رود و بردار ورودی‌ها و خروجی‌های هر DMU_j، به‌صورت $x = x_1, x_2, \dots, x_m), y = y_1, y_2, \dots, y_s)$ است. خروجی‌ها و ورودی‌ها می‌توانند همگی صحیح، حقیقی یا ترکیبی از صحیح و حقیقی باشند به‌طور مثال p' تعداد ورودی‌های صحیح و qتعداد ورودی‌های غیرصحیح باشند، در این صورت تعداد ورودی‌ها به‌صورت $m = p' + q$ است. تکنولوژی امکان تولید، وقتی همه ورودی‌ها صحیح - همه خروجی‌ها حقیقی است، به‌صورت زیر است:

$$T_{io} = \left\{ x, y) | \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda_j \geq 0, \forall_j\ x_{io} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j , y_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, i \in \mathbb{I}, r \in \mathbb{R} \right\}. \quad (۱)$$

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

و با استفاده از آن، مدل زیر برای محاسبه کارایی پیشنهاد می‌شود :

$$
\begin{aligned}
&\min \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{p'} s_i^- + \sum_{i=1}^{q} s_i^- + \sum_{i=1}^{s} s_r^+ \right), \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}, \qquad r \in \mathbb{R}, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip}, \qquad i \in \mathbb{I}, \\
&\theta x_{ip} - s_i^- = x_{ip}, \qquad i \in \mathbb{I}, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\lambda_j \geq 0, x_i \in \mathbb{I}, s_i^-, s_i^-, s_r^+ \geq 0.
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

که ε یک عدد غیرارشمیدسی است و $(x_{ip}, y_{rp} + s_r^+)$ مرجع واحد مورد بررسی (x_{ip}, y_{rp}) است [19].

اگر خروجی صحیح مقدار است، قیدهای $r \in \mathbb{I} \quad , y_{rp} + s_r^+ = y_{rp}$ به مجموعه قیود اضافه می‌شود و اگر خروجی حقیقی مقدار در داده‌ها نیست، قید $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \quad r \in \mathbb{R}$ از مجموعه قیود حذف می‌شود.

۲-۲- بازده به مقیاس

فرض کنید برای هر $DMU_j,\ j = 1,2,\ldots,n$ که m ورودی برای تولید s خروجی به‌کار می‌رود، بردار ورودی‌ها وخروجی‌های هر DMU_j، به‌صورت $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ، $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$ است. مجموعه امکان تولید BCC به‌صورت زیر است:

$$T_V = \left\{ (x,y) \mid \exists\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \lambda_j \geq 0, \forall_j\ x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

$(x_p, y_p) \in \partial T_v$ که ∂T_v مرز PPS است. واحدها را به مرز تصویر می‌نماید و نوع بازده به مقیاس را مشخص می‌کند. بازده به مقیاس خاصیت موضعی دارد؛ تغییرات ورودی را در اطراف هر DMU بررسی می‌کند.

در ادامه $\alpha(\beta)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

فرض کنیم $\beta > 0$ مقدار ثابتی است، آن‌گاه

$$\alpha(\beta) = \max \left\{ \alpha \mid (\beta x_p, \alpha y_p) \in T_v \right\}. \qquad (۳)$$

با محفوظ داشتن تعریف $\alpha(\beta)$ ، اگر

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{\alpha\ \beta) - 1}{\beta - 1} = \gamma\ . \qquad (۴)$$

در این‌صورت اگر :

$\gamma > 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس صعودی (افزایشی) دارد IRS[1] .

$\gamma > 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس نزولی (کاهشی) دارد DRS[2] . (۵)

$\gamma = 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس ثابت دارد CRS[3].

همچنین در صورتی که **حد (۴)** موجود نیست با توجه به قطعه خطی‌بودن PPS حد راست و چپ موجود است و قوانین زیر برای تعیین بازده به مقیاس برقرار است:

$\gamma^- > 1, \gamma^+ > 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس صعودی (افزایشی) دارد.

$\gamma^- < 1, \gamma^+ < 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس نزولی (کاهشی) دارد. (۶)

$\gamma^- > 1, \gamma^+ < 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس ثابت دارد.

[1] Increasing Returns to Scale

[2] Decreasing Returns to Scale (DRS)

[3] Constant Returns to Scale (CRS)

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

روش‌های بسیاری برای محاسبه بازده به مقیاس با داده‌های حقیقی پیشنهاد گردیده، اما در مورد داده‌های صحیح ، به این موضوع پرداخته نشده است. با توجه به این‌که نوع بازده به مقیاس به مدیر نشان می‌دهد که نیاز در تغییر ورودی‌ها و خروجی‌ها برای رسیدن به هدف مطلوب است یا نیست و نیز مقدار این تغییر با مدل‌های موجود (که احتمالا این مدل‌ها نیز با توجه به صحیح بودن داده‌ها نیاز به تغییر دارند) مشخص می‌گردد؛ اگر صحیح بودن داده‌ها درنظر گرفته نشود ، هم در تعیین نوع بازده به مقیاس و هم در ادامه در تعیین مقدار تغییر، مدیر گمراه می‌شود. از این رو در ادامه روش پیشنهادی برای محاسبه بازده به مقیاس در داده‌های صحیح ارایه می‌گردد.

۳- روش پیشنهادی

۳-۱- تعریف بازده به مقیاس

برای محاسبه بازده به مقیاس در داده‌های صحیح میزان تغییرات خروجی را نسبت به میزان تغییرات ورودی می‌سنجیم، پاسخ به این پرسش " اگر ورودی به نزدیک‌ترین ورودی (مشخصا) صحیح تغییر پیدا کند، نسبت تغییرات خروجی به ورودی چه مقدار می‌شود؟" تعاریف و مدل‌های جدید را پایه‌ریزی می‌کند.

را همانند قبل به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = max\{\alpha | (\beta x_p, \alpha y_p) \in T_{iv}\}. \quad (۷)$$

که βx_{ip} به x_{ip} که یک عدد صحیح و y_{rp} به $\alpha(\beta)y_{rp}$ که یک عدد حقیقی است، تبدیل می‌کند. T_{iv} همان تعریف **رابطه (۱)** است. در این صورت داریم:

$$\frac{\alpha\ \beta)y - y}{\beta x - x} = \frac{\alpha\ \beta) - 1)y}{\beta - 1)\ x} = \frac{\alpha\ \beta) - 1}{\beta - 1}.\frac{y}{x}, \quad (۸)$$

که $\frac{\alpha\ \beta)-1}{\beta-1}$ را نسبت تغییرات خروجی به ورودی می‌نامیم و با γ نشان می‌دهیم.

$$\gamma = \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1}. \quad (۹)$$

تفاوت **رابطه(۹)** با **رابطه (۴)** در این است که **رابطه (۴)** را به علت گسسته بودن PPS از (استفاده از حد) نمی‌توان استفاده کرد.

$\gamma > 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس صعودی (افزایشی) دارد.

$\gamma < 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس نزولی (کاهشی) دارد. (۱۰)

$\gamma = 1$ آن‌گاه DMU_P بازده به مقیاس ثابت دارد.

که همانند **رابطه (۵)** است.

۳-۲- حالت اول تک‌ورودی صحیح-تک‌خروجی حقیقی

$\alpha(\beta)$ را همانند قبل به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = max\{\alpha | (\beta x_p, \alpha y_p) \in T_{iv}\}, \quad (۱۱)$$

که βx_p به x_p که یک عدد صحیح و y_p به $\alpha(\beta)y_p$ که یک عدد حقیقی است، تبدیل می‌کند. در این‌صورت داریم:

$$\frac{\alpha\ \beta)y - y}{\beta x - x} = \frac{\alpha\ \beta) - 1)y}{\beta - 1)\ x} = \frac{\alpha\ \beta) - 1}{\beta - 1}.\frac{y}{x}.$$

که $\frac{\alpha\ \beta)-1}{\beta-1}$ را نسبت تغییرات خروجی به ورودی می‌نامیم و با γ نشان می‌دهیم.

$$\gamma = \frac{\alpha\ \beta) - 1}{\beta - 1}. \quad (۱۲)$$

همانند **رابطه (۱۰)** می‌توان نوع بازده به مقیاس را نتیجه گرفت.

نکته حائز اهمیت در این مساله آن است که به علت گسسته بودن PPS بازده به مقیاس باید به‌طور مجزا محاسبه شود؛ یعنی برای بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست مدل مجزا پیشنهاد شود و **رابطه (۱۰)** برای هر بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ نیز به‌طور

توسلی و همکاران / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۸۳۱-۸۱۴

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

مجزا برقرار است. مقدار تغییر ورودی صحیح هر DMU را از مدل‌های زیر تعیین می‌کنیم. ورودی بعد از تغییر، مجددا عددی صحیح است. برای محاسبه β در تعیین بازده به مقیاس راست از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ s.t. \quad & \beta x_p = x'_p, \\ & x'_p - x_p = 1, \\ & x'_p \in \mathbb{I}, \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که $x_p \neq 0$.

قید $\beta x_p = x'_p$ ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می‌دهد به‌گونه‌ای که به ورودی بیشتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید $\beta x_p - x'_p = 1$ باعث می‌شود تا نزدیک‌ترین جایگاه ورودی صحیح DMU_P را مشخص کند. ما به دنبال کم‌ترین افزایش در ورودی DMU_P هستیم، پس تابع هدف $\min \beta$ است. β^{1*} مقدار بهینه **مدل (۱۳)** است و برای محاسبه بازده به مقیاس راست استفاده می‌شود. برای محاسبه β در بازده به مقیاس چپ از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \beta, \\ s.t. \quad & \beta x_p = x'_p, \\ & x_p - x'_p = 1, \\ & x'_p \in \mathbb{I}, \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که در آن $x_p \neq 0$.

قید $\beta x_p = x'_p$ ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می‌دهد به‌گونه‌ای که به ورودی کمتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید $\beta x_p - x'_p = 1$ باعث می‌شود تا نزدیک‌ترین جایگاه ورودی صحیح DMU_P را مشخص کند. ما به دنبال کم‌ترین کاهش در ورودی DMU_P هستیم، پس مقدار β بیشترین مقدار ممکن است و در نتیجه تابع هدف $\max \beta$ است. β^{2*} مقدار بهینه **مدل (۱۴)** است و برای محاسبه بازده به مقیاس چپ استفاده می‌شود.

قضیه ۱- در **مدل (۱۳)**، β بین ۱تا ∞ و مقدار β^{1*} عددی بین ۱ و ۲ است.

اثبات: نزدیک‌ترین واحد صحیح قبل از x_p، x'_p است. پس $x'_p > x_p$ و در نتیجه $\beta = \frac{x'_p}{x_p} > 1$؛ که $\beta = \frac{x'_p}{x_p}$ یک جواب شدنی برای این مدل نیز است.

مقدار تابع هدف عددی بین ۱تا ∞ است، چرا که $x_p < x'_p$

و از آن‌جا که $x'_p = x_p + 1$ پس مقدار $\beta^{1*} \in (1,2]$.

قضیه ۲- در **مدل (۱۴)**، βبین ۰ تا ∞ و مقدار β^{2*} عددی بین ۰ و ۱ است.

اثبات: نزدیک‌ترین واحد صحیح قبل از x_p، x'_p است، پس $x'_p < x_p$ و درنتیجه $\beta = \frac{x'_p}{x_p} < 1$؛ که $\beta = \frac{x'_p}{x_p}$ یک جواب شدنی برای این مدل نیز است.

مقدار تابع هدف عددی بین ۰ تا ∞ است، چرا که $0 \leq x'_p < x_p$ و از آن‌جا که $x'_p = x_p - 1$ پس مقدار $\beta^{2*} \in [0,1)$.

توجه داشته باشید حتی اگر واحدهای تحت ارزیابی چند ورودی داشته باشند که فقط یکی از آن‌ها صحیح است برای به‌دست آوردن مقدار بهینه β از **مدل (۱۳)** و **مدل (۱۴)** استفاده می‌کنیم و تنها ورودی صحیح در مدل پیشنهادی دخالت داده می‌شود. سپس میزان تغییر برای داده‌ی صحیح برای همه‌ی ورودی‌های غیرصحیح نیز اعمال می‌شود، یعنی مقدار تغییر برای ورودی صحیح در همه‌ی ورودی‌ها ضرب می‌شود. x_{ip} به $\beta^* x_{ip}$ تبدیل می‌شود $(i = 1,2, \dots, m)$ و در ادامه برای به‌دست آوردن α از **مدل (۲۰)** استفاده می‌شود.

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

مدل ارزیابی بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ در حالت تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \alpha , \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le \beta^* x_p , \qquad x_p \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge \alpha y_p , \qquad y_p \in \mathbb{R}, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \ge 0, \alpha \ge 0. \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

β^* جواب بهینه به‌دست آمده از **مدل (۱۳)** یا **مدل (۱۴)** است که بر اساس این‌که بازده‌به مقیاس چپ یا بازده به مقیاس راست بخواهد محاسبه شود از مدل‌های مربوط نتیجه می‌شود . به اختصار به جای β^{*1} و β^{*2} از β^* استفاده می‌کنیم.

قضیه ۳- مدل (۱۵) شدنی است و مقدار تابع هدف برای بازده به مقیاس کاهشی نامنفی و برای بازده به مقیاس افزایشی مقدار تابع هدف بزرگ‌تر مساوی ۱ است.

اثبات: برای $\beta^* < 1$ (**مدل (۱۳)**):

$$\lambda_p = \lambda_{p-1} = \frac{1}{2}, \lambda_{\substack{j \\ j \neq p, p-1}} = 0, \beta = \overline{0/9}, \alpha = 0.$$

یک جواب شدنی این مدل است.

چون $\alpha = 0$ یک جواب شدنی مسئله است پس $\alpha^* \ge 0$.

برای $\beta^* > 1$ (**مدل (۱۴)**):

$$\lambda_p = 1, \lambda_{\substack{j \\ j \neq p}} = 0, \beta = 1/01, \alpha = 1.$$

یک جواب شدنی این مدل است. در نتیجه $\alpha^* \ge 1$.

با به‌دست آوردن β و α از این مدل‌ها مقدار و نوع بازده به مقیاس را با توجه به **رابطه (۹)** و **رابطه (۱۰)** به‌دست می‌آوریم.

توجه داشته باشید **قضیه ۱** تا **قضیه ۳** نشان می‌دهند که γ می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر را اختیار کند.

در بازده به مقیاس راست $\beta > 1$ و $\alpha \ge 1$ پس $\gamma \ge 0$.

در بازده به مقیاس چپ $\beta < 1$ و $\alpha \ge 0$:

پس برای $0 \le \alpha \le 1$ نتیجه می‌شود $\gamma \ge 0$.

و برای $\alpha \ge 1$، می‌توان نتیجه گرفت $\gamma \le 0$.

۲-۳- حالت دوم: ورودی ترکیبی (ورودی صحیح و ورودی غیرصحیح) و خروجی حقیقی

با این فرض که ورودی‌های ترکیبی از صحیح و حقیقی باشند، تعریف بازده به مقیاس را به‌صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$\alpha\ \beta) = \max \left\{ \alpha \middle| \begin{pmatrix} \beta x_{ip}^{\mathbb{I}} \\ \beta x_{i'p}^{N\mathbb{I}} \\ \alpha y_{rp} \end{pmatrix} \in T_{iv}, i = 1,2, \dots, p', i' = 1,2, \dots, q \quad p' + q = m), r = 1,2, \dots, s \right\}. \qquad (۱۶)$$

مجددا با استفاده از مدل زیر بازده به مقیاس را محاسبه می‌کنیم:

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

$$\gamma = \frac{\alpha\ \beta) - 1}{\beta - 1}. \qquad (۱۷)$$

که γ نشان‌دهنده‌ی نسبت تغییرات خروجی به ورودی است، همان قوانین **رابطه (۱۰)** در مورد مقدار و نتیجه‌گیری نوع بازده به مقیاس برقرار است. مقدار تغییر ورودی صحیح هر DMU را از مدل‌های زیر تعیین می‌کنیم. ورودی بعد از تغییر، مجددا عددی صحیح است.

برای محاسبه β در بازده به مقیاس راست از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & min\ \beta, \\ & s.t. \\ & \beta x_{ip} = x\prime_{ip}, \\ & \beta > 1, \\ & x\prime_p \in \mathbb{I}\ . \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که $x_p \neq 0$.

قید $\beta x_p = x\prime_p$ ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می‌دهد به‌گونه‌ای که به ورودی بیشتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید $\beta x_p - x'_p = 1$ از این مدل حذف شده‌است. چون تغییر به‌صورت شعاعی می‌باشد و چند ورودی همزمان به‌صورت شعاعی تغییر می‌کنند و ممکن است این شرط را نتوانند به‌صورت همزمان برای همه ورودی‌ها برقرار کنند. ما به دنبال کم‌ترین افزایش در ورودی DMU_P هستیم، پس تابع هدف $min\beta$ است. β^{1*} مقدار بهینه **مدل (۱۸)** است و برای محاسبه بازده به مقیاس راست استفاده می‌شود.

برای محاسبه β در بازده به مقیاس چپ از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & max\beta\ , \\ & s.t. \\ & \beta x_{ip} = x\prime_{ip}, \\ & \beta < 1, \\ & x\prime_p \in \mathbb{I}. \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که در آن $x_p \neq 0$.

قید $\beta x_p = x\prime_p$ ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می‌دهد به‌گونه‌ای که به ورودی کمتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید $\beta x_p - x'_p = 1$ مطابق توضیحات بالا حذف شده‌است. ما به دنبال کم‌ترین کاهش در ورودی DMU_P هستیم، پس تابع هدف $max\beta$ است. β^{2*} مقدار بهینه **مدل (۱۹)** است و برای محاسبه بازده به مقیاس چپ استفاده می‌شود.

در این دو مدل به دنبال یک β مشترک می‌گردد تا همه ورودی‌های صحیح را به یک داده صحیح که در **مدل (۱۸)** کوچک‌تر و در **مدل (۱۹)** بزرگ‌تر از ورودی اولیه است برساند. فرض کنید ورودی‌های صحیح یک DMU به‌صورت $x_1 = 72, x_2 = 60$ است با استفاده از **مدل (۱۸)**، $\beta = 2$ به‌دست می‌آید و $x'_1 = 144, x'_2 = 120$ می‌شود به ازای $\beta = 1.3$، $x\prime_1 = 93.6, x\prime_2 = 78$ به‌دست می‌آید، که ملاحظه می‌شود ورودی دوم صحیح عددی غیرصحیح است؛ پس مدل به دنبال β است که هر دو ورودی صحیح را به مقداری صحیح تغییر دهد.

مدل پیشنهادی برای تعیین نوع بازده به مقیاس به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & max\ \alpha, \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{ip}\ , \qquad i \in \mathbb{I}, i = 1,2,3, \dots, p'. \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{i\prime p}, \qquad i' \in N\mathbb{I}, i' = 1,2,3, \dots, q. \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{rp}\ , \qquad r \in \mathbb{R}, r = 1,2,3, \dots, s. \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0.$$

قید اول ورودی‌های صحیح هر واحد را به نزدیک‌ترین واحد صحیح تغییر می‌دهد و قید دوم ورودی‌های غیرصحیح را به همان اندازه کم‌ترین تغییر ورودی صحیح هر واحد تغییر می‌دهد . براساس این تغییرات بهترین خروجی ممکن نسبت به مرز کارایی با همان توضیح در حالت قبل برای این واحد تغییر یافته به‌دست می‌آید تا مقدار بازده به مقیاس برآورد شود. β^* جواب بهینه به‌دست آمده از **مدل (۱۸)** یا **مدل (۱۹)** است که بر اساس این که بازده به مقیاس چپ یا بازده به مقیاس راست بخواهد محاسبه شود از مدل‌های مربوط نتیجه می‌شود و به اختصار به جای β^{*1} و β^{*2} از β^* استفاده می‌کنیم.

۳-۳- حالت سوم: همه ورودی‌ها صحیح و خروجی‌ها حقیقی

اگر همه ورودی‌ها صحیح و خروجی‌ها حقیقی باشند یعنی $x_i^{\mathbb{I}}, i = 1,2,\dots,m\ \ y_r^{\mathbb{R}}, r = 1,2,\dots,s$ است، میزان تغییرات $x_i^{\mathbb{I}}$ را β نمایش می‌دهیم و با **مدل (۱۷)** و **مدل (۱۸)** به‌دست می‌آوریم چرا که تمام ورودی‌ها در این حالت صحیح هستند.

$\alpha(\beta)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha\ \beta) = max\left\{\alpha | \begin{pmatrix}\beta x_{ip}^{\mathbb{I}} \\ \alpha y_{rp}\end{pmatrix} \in T_{iv}, i = 1,2,\dots,m\ \ r = 1,2,\dots,s\right\}. \qquad (۲۱)$$

نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی را با استفاده از **رابطه (۹)** محاسبه می‌کنیم. مجددا مقایسه γ با ۱ را در **رابطه (۱۰)** برای تعیین نوع بازده به مقیاس را می‌پذیریم. مدل پیشنهادی برای این حالت به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & max\ \alpha, \\ & s.t. \\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \leq \beta_i^* x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{rp}, \quad r \in \mathbb{R}, \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0. \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

این مدل همانند مدل‌های قبل مقدار α را محاسبه می‌کند و تعاریف قبل متناسب با مدل‌ها برقرار است.

۳-۴- حالت چهارم: همه ورودی‌ها صحیح-همه خروجی‌ها صحیح

اگر همه ورودی‌ها صحیح و خروجی حقیقی باشند یعنی $x_i^{\mathbb{I}}, i = 1,2,\dots,m\ \ y_r^{\mathbb{R}}, r = 1,2,\dots,s$ است، میزان تغییرات $x_i^{\mathbb{I}}$ را β نمایش می‌دهیم و با **مدل (۱۷)** و **مدل (۱۸)** به‌دست می‌آوریم. $\alpha(\beta)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha\ \beta) = max\left\{\alpha | \begin{pmatrix}\beta x_{ip}^{\mathbb{I}} \\ \alpha y_{rp}^{\mathbb{I}}\end{pmatrix} \in T_{v}, i = 1,2,\dots,m\ \ r = 1,2,\dots,s\right\}. \qquad (۲۳)$$

نسبت تغییرات خروجی به ورودی را با استفاده از **رابطه (۹)** محاسبه می‌کنیم.

مجددا با مقایسه γ با ۱ در **رابطه (۱۰)** برای تعیین نوع بازده به مقیاس را می‌پذیریم.

مدل ارزیابی بازده به مقیاس در حالت ورودی صحیح - خروجی صحیح به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & max\ \alpha, \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{rp}, \quad r \in \mathbb{I}, \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

توسلی و همکاران / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۸۳۱-۸۱۴

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

$$\alpha y_{rp} = y'_{rp}, \qquad r \in \mathbb{I},$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$
$$\lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0, y'_{rp} \in \mathbb{I}.$$

نسبت به حالت قبل قید $\left(y'_{rp} \in \mathbb{Z}\right), \alpha y_{rp} = y'_{rp} \quad r \in \mathbb{I}$ را اضافه دارد که باعث می‌شود تغییرات خروجی را به‌گونه‌ای تنظیم کند که خروجی صحیح مقدار شود.

۵-۳- ماهیت خروجی بازده به مقیاس حالت چهارم: ورودی صحیح-خروجی صحیح

برای محاسبه بازده به مقیاس در داده‌های صحیح میزان تغییرات خروجی را نسبت به میزان تغییرات ورودی می‌سنجیم، پاسخ به این پرسش "اگر خروجی به نزدیک‌ترین خروجی(مشخصا) صحیح تغییر پیدا کند، درصد تغییرات خروجی چه مقدار می‌شود؟" تعاریف و مدل‌های جدید را (در ماهیت خروجی) پایه‌ریزی می‌کند.

$\beta(\alpha)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta(\alpha) = min\left\{\beta | \left(\beta(\alpha)x_p, \alpha y_p\right) \in T_{iv}\right\},$$
$$T_{iv} = \left\{ x, y) | \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda_j \geq 0, \forall_j\, x_i \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y_r \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, i, r \epsilon\, \mathbb{I} \right\}. \qquad (۲۵)$$

که y_{rp} به αy_{rp} که یک عدد صحیح و x_{ip} به $\beta(\alpha)x_{ip}$ که یک عدد صحیح است، تبدیل می‌کند. در این‌صورت داریم

$$\frac{\alpha y - y}{\beta(\alpha)x - x} = \frac{\alpha - 1)y}{\beta(\alpha) - 1)\, x} = \frac{\alpha - 1}{\beta(\alpha) - 1} \cdot \frac{y}{x}.$$

که $\frac{\alpha-1}{\beta(\alpha)-1}$ را نسبت تغییرات می‌نامیم و با γ نشان می‌دهیم.

$$\gamma = \frac{\alpha - 1}{\beta(\alpha) - 1}. \qquad (۲۶)$$

مقدار تغییر هر خروجی صحیح DMU را از مدل‌های زیر تعیین می‌کنیم. خروجی بعد از تغییر، مجدد عددی صحیح است:

$$\begin{aligned} & max\ \alpha, \\ s.t. & \\ & \alpha y_{rp} = y'_p, \\ & \alpha \geq 1, \\ & y'_p \in \mathbb{I}. \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

$$\begin{aligned} & min\, \alpha, \\ s.t. & \\ & \alpha y_{rp} = y'_p, \\ & \alpha \leq 1, \\ & y'_p \in \mathbb{I}. \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

مقدار α^{1*} با استفاده از **مدل (۲۷)** برای بازده به مقیاس راست و مقدار α^{2*} از **مدل (۲۸)** برای بازده به مقیاس چپ در ماهیت خروجی تعیین می‌شود و بهترین خروجی صحیح را که در **مدل (۲۷)** بزرگ‌تر از خروجی اولیه و در **مدل (۲۸)** کوچک‌تر از خروجی اولیه برای واحد تحت ارزیابی می‌دهد به طوری که تمام خروجی‌های صحیح یک DMU با یک مقدار افزایش یا کاهش مشترک به یک خروجی صحیح جدید بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از خود برسند.

مدل ارزیابی بازده به مقیاس در حالت ورودی صحیح - خروجی صحیح به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & min\, \beta, \\ s.t. & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \beta x_{ip} \qquad i \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \alpha^* y_{rp} \qquad r \in \mathbb{I}, \\ & \beta x_{ip} = x'_{rp} \qquad r \in \mathbb{I}, \\ & \beta > 1, \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$
$$\lambda_j \geq 0, \beta \geq 0 .$$

α^* جواب بهینه به‌دست آمده از **مدل (۱۷)** یا **مدل (۱۸)** است که براساس این که بازده به مقیاس چپ یا بازده به مقیاس راست بخواهد محاسبه شود از مدل‌های مربوط نتیجه می‌شود و به اختصار به جای α^{*1} و α^{*2} از α^* استفاده می‌کنیم. دلیل استفاده از *max*، یافتن بیش‌ترین خروجی به خروجی مورد نظر است. قید $\beta > 1$ به‌علت پیشگیری از نشدنی بودن بازده به مقیاس است و در هنگام محاسبه بازده به مقیاس کاهشی در قیود جای می‌گیرد. در بازده به مقیاس افزایشی قید $\beta < 1$ جایگزین می‌شود. تابع هدف کم‌ترین میزان β را نسبت به α محاسبه شده از **مدل (۲۷)** و **مدل (۲۸)** می‌دهد، تا خروجی مورد نظر با کم‌ترین ورودی ممکن تولید شود.

۴ - مثال

۴-۱- تک‌خروجی صحیح - تک‌ورودی حقیقی

یک شرکت فرضی با یک ورودی صحیح-یک خروجی حقیقی با ۱٤ تا *DMU* درنظر گرفته شده‌است (می‌توان چنین فرض کرد در یک شرکت بزرگ با خدمات تایپ با ۱٤ زیرمجموعه، ورودی تعداد کامپیوتر هر شرکت کوچک و خروجی میزان درآمد در ماه به میلیون است). اطلاعات مربوط به ورودی و خروجی هر *DMU* در **جدول ۱** آمده است.

جدول ۱- اطلاعات واحدهای تحت ارزیابی (مقدار ورودی و مقدار خروجی).

Table 1- Data of the units under evaluation (input-output).

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
x	4	5	5	6	8	9	10	12	13	16	18	21	22	24
y	2	5.8	6	9	10.5	12.7	15	16	17	17.1	18.3	18.2	18.8	18.8

در **شکل ۱** همه *DMUs* نمایش داده شده‌اند؛ محور x محور ورودی و محور y، محور خروجی است، خطوط خاکستری پررنگ *PPS* است. خطوط خط‌چین، مرز با داده‌های (هم‌ورودی و هم‌خروجی) حقیقی فرضی به‌منظور بهتر نمایش دادن *PPS* معمول و نمایش تصاویر نقاط ناکارا و کارای ضعیف است. کارایی هر یک از این *DMUs* با استفاده از مدل پوششی ماهیت ورودی تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی محاسبه می‌کنیم.

جدول ۲- اندازه کارایی DMUs.

Table 2- Efficiency scores of DMUs.

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
مرجع	A	C	C	*D*	E′ = $\begin{bmatrix}7\\10.5\end{bmatrix}$	F′ = $\begin{bmatrix}9\\13.5\end{bmatrix}$	G	H	I	J′ = $\begin{bmatrix}14\\17.1\end{bmatrix}$	K	L′ = $\begin{bmatrix}18\\18.2\end{bmatrix}$	M	M
اندازه کارایی	1	1	1	0.875	1	1	1	1	1	0.875	1	0.875	1	0.917
مقدار اسلک	همه صفر	s_o = 0.2	همه صفر	همه صفر	همه صفر	s_o = 0.8 بقیه صفر	همه صفر	s_i = 0.5 بقیه صفر	همه صفر	s_i = 0.6 بقیه صفر	همه	s_i = 0.4 صفر	همه صفر	همه صفر

مقدار γ با استفاده از **مدل پیشنهادی (۱۲)** به‌صورت زیر حاصل می‌شود و نوع بازده به مقیاس با استفاده از **رابطه (۱۰)** تعیین می‌شود.

جدول ۳- مقدار بازده به مقیاس چپ و راست.

Table 3- Left and right RTS values.

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
γ^+	8	2.8	2.5	1	2.3	1.6	0.4	0.8	0.2	0.9	0.1	0.7	0	0
RTS	IRS	IRS	IRS	CRS	IRS	IRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS
γ^-	-	3.3	3.3	2	0	0.5	1	0.2	0.5	-0.4	0.3	-0.4	0.1	0
RTS	نشدنی	IRS	IRS	IRS	DRS	DRS	CRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS

ملاحظه می‌شود ترتیب بازده به مقیاس افزایشی، ثابت و کاهشی، همانند قبل و مدل‌های دیگر *DEA* با داده‌های حقیقی، رعایت نشده است.

توسلی و همکاران / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۸۳۱-۸۱۴

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

دو *DMU* که بازده به مقیاس ثابت دارند (D,G) بر روی خطی (فرضی) قرار دارند که اگر داده‌ها حقیقی بودند نقش *MPSS* می‌گرفتند.

بازده به مقیاس چپ واحد C افزایشی و بازده به مقیاس راست G کاهشی است که به‌این‌علت است که این دو واحد در دو سمت پاره‌خطی است که بر روی خط فرضی که از مبدا می‌گذرد و در *DEA* حقیقی نقش *MPSS* دارد، قرار دارند.

می‌دانیم که *RTS* یک شاخص موضعی است، واحدی که نوع بازده به مقیاس هر *DMU* نسبت به آن سنجیده می‌شود و از **مدل (۱۳)** تا **مدل (۱۵)** به‌دست آمده است، در **جدول ۴** آورده شده است.

جدول ۴- واحد نزدیک به DMU جهت بررسی بازده به مقیاس.

Table 4- Unit close to the DMU for evaluating the RTS.

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
$\beta^{+}x$	5	6	6	7	8	10	12	15	16	17	22	22	27	27
$\alpha^{+}y$	6	9	9	10.5	12	15	16.3	17.5	17.8	18	18.8	18.8	18.8	18.8
$\beta^{-}x$	3	4	4	5	7	8	9	11	12	15	17	20	21	23
$\alpha^{-}y$	-2	2	2	6	10.5	12	13.5	15.7	16.3	17.5	18	18.6	18.7	18.8

همان‌طور که در نتایج جدول و خطوط ترسیم شده در **شکل ۱** دیده می‌شود واحدهای ناکارای I , J و F ابتدابه بیش‌ترین مقدار خروجی روی مرز تصویر می‌شوند و سپس مقدار ورودی آن‌ها برای محاسبه بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ افزایش و کاهش پیدا می‌کند و متناسب با آن مقدار خروجی مناسب را مشخص می‌کند .

۲-۴- مقایسه نتایج دو روش

در جدول بعدی مقدار بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست روش پیشنهادی با نوع بازده به مقیاسی که در حالت کلاسیک (عدم توجه به صحیح بودن داده‌ها) به‌دست آمده مقایسه شده‌است.

جدول ۵- مقایسه نوع بازده به مقیاس حاصل از دو روش.

Table 5- Comparison of RTS types resulted by the two methods.

													روش پیشنهادی	
DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
γ^{+}	8	2.8	2.5	1	2.3	1.6	0.4	0.8	0.2	0.9	0.1	0.7	0	0
نوع	IRS	IRS	IRS	CRS	IRS	IRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS
γ^{-}	-	3.3	3.3	2	0	0.5	1	0.2	0.5	-0.3	0.2	-0.4	0.1	0
نوع	نشدنی	IRS	IRS	IRS	CRS	DRS	CRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS
													نسبت تغییرات	
راست	3	2	2	1	1	1	0.5	0.5	0.2	0.3	0.1	0.2	0	0
نوع	IRS	IRS	IRS	CRS	CRS	CRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS
چپ	-	2	2	2.5	1	1	1	0.4	0.5	0.2	0.2	0.1	0.2	0
نوع	نشدنی	IRS	IRS	IRS	CRS	CRS	CRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS	DRS

همان‌طورکه دیده می‌شود در واحدها در هر دو روش نوع بازده به مقیاس تفاوت‌هایی دیده می‌شود .

در شکل مشاهده می‌شود در نقطه F با یک واحد افزایش در ورودی و سپس با حداکثر مقدار افزایش به نقطه G می‌رسد و بازده به مقیاس راست افزایشی دارد (نسبت تغییرات خروجی به ورودی بیشتر از ۱ است). برای بازده به مقیاس چپ با یک واحد کاهش در ورودی به نقطه P می‌رسد. نسبت تغییرات خروجی به ورودی کمتر از ۱ است و بازده به مقیاس چپ، کاهشی است. درصورتی که F در ناحیه‌ای واقع شده‌است که در *DEA* بازده به مقیاس ثابت داشته‌است. مجموع مرجع F یعنی F' نیز با این‌که هم روی مرز *PPS* صحیح و هم روی خط مرز حقیقی فرضی واقع شده‌است، اما برای رسیدن به نقطه P و G نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی بیشتر از ۱ در هر دو مورد دارد.

در مورد نقطه A ملاحظه می‌شود که مقدار αy مقداری منفی (۲-) شده است که ناشی از منفی شدن α است و این اتفاق همان‌طور که در **شکل ۱** دیده می‌شود بدان جهت است که در بررسی بازده به مقیاس چپ با کم شدن یک واحد خروجی، از مرز *PPS* خارج

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

می‌شویم و با کاهش خروجی به درون PPS برنمی‌گردد. یعنی منفی بودن مقدار α و درنتیجه αy نشان از نشدنی بودن محاسبه مقدار بازده به مقیاس چپ و همچنین امکان عدم کاهش ورودی است. هرچند مقدار γ قابل محاسبه است.

۳-۴- مثالی برای حالت تک‌ورودی صحیح-تک‌خروجی صحیح

یک شرکت فرضی با ۱۰ واحد درنظر گرفته شده است که دارای یک ورودی صحیح-یک خروجی صحیح است. در **جدول ۶** مقدار ورودی-خروجی هر واحد آورده شده‌است. (می‌توان شرکتی مانند مثال قبل فرض کرد با این تفاوت که این‌بار خروجی را تعداد کار تایپ تحویلی در روز درنظر گرفته‌ایم).

جدول ۶- اطلاعات واحدهای تحت ارزیابی(ورودی- خروجی).

Table 6- Data of the units under evaluation (input-output).

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	4	5	6	7	8	9	10	12	13	**18**
y	5	7	9	10	12	13	15	16	17	**18**

در **شکل ۲**، PPS مرتبط با این واحدها کشیده شده است. همانند قبل محور افقی ورودی و محور عمودی خروجی است. ورودی و خروجی هر دو صحیح هستند، پس PPS به‌صورت نقطه‌ای و گسسته است (محل تقاطع خطوط شطرنجی PPS را تشکیل می‌دهد). مقدار کارایی این واحدها به‌صورت **جدول ۷** است.

جدول ۷- اندازه کارایی DMUs.

Table 7- Efficiency scores of DMUs.

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
مرجع	A	B	C	*D*	E	*F*	G	H	I	J
اندازه کارایی	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
مقدار اسلک	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر	همه صفر

تمامی واحدها کارای قوی می‌باشند، و روی مرز PPS می‌باشند (واحدها قوی انتخاب شده‌اند چرا که اگر واحدی ناکارا است برای تعیین نوع بازده به مقیاس با تصویر واحد روی مرز نوع بازده به مقیاس مشخص می‌شود). مقدار تغییر ورودی هر DMU با استفاده از **مدل (۲۴)** تا **مدل (۲۶)** در **جدول ۸** آمده است.

جدول ۸- مقدار تغییر هر DMU.

Table 8- Amount of change per DMU.

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
β^+	1.250	1.200	1.6667	1.1429	1.250	1.222	1.200	1.2500	1.2308	**1.222**
β^-	0.750	0.800	0.833	0.8571	0. 75	0.778	0.800	0.75	0.7692	**0.778**

مقدار بازده به مقیاس و واحدی که DMU موردنظر با آن مقایسه می‌شود در **جدول ۹** آمده‌است.

جدول ۹- واحد نزدیک به DMU جهت بررسی بازده به مقیاس.

Table 9- Unit close to the DMU for evaluating the RTS.

DMU	A	B	C	D	*E*	F	G	*H*	I	J
β^+x	5	6	7	8	9	10	11	13	14	19
α^+y	7	9	10	12	13	15	15	17	17	18
γ^+	1.6	1.4	0.7	1.4	0.7	1.4	0	0.75	0	0
RTS type	IRS	IRS	DRS	IRS	DRS	IRS	DRS	DRS	DRS	DRS
β^-x	3	4	5	6	7	8	9	11	12	14
α^-y	-2	5	6	9	10	12	13	15	16	17
γ^-	-	1.4	1.3	0.7	1.3	0.7	1.3	0.75	0.8	0.3
RTS type	نشدنی	IRS	IRS	DRS	IRS	DRS	IRS	DRS	DRS	DRS

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

ملاحظه می‌شود که ترتیب بازده به مقیاس یعنی افزایشی، ثابت و سپس کاهشی رعایت نشده‌است و نوعی آشفتگی در میانه جدول دیده‌می‌شود که از حقیقی بودن خروجی ناشی شده‌است. صحیح بودن خروجی باعث می‌شود تا نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی در ناحیه‌ای که در گذشته مرتبط با *CRS* بوده حفظ نشود و تغییر کند. مثلا در نقطه *F* ملاحظه می‌شود که از سمت راست به ازا یک واحد افزایش در ورودی تا ۲ واحد می‌تواند افزایش خروجی داشته‌باشد اما به ازای یک واحد کاهش ورودی، با یک واحد کاهش در خروجی در *PPS* قرارمی‌گیرد. این واحد دارای بازده به مقیاس راست افزایشی و بازده به مقیاس چپ ثابت است.

۴-۴- مثالی با داده واقعی و مقایسه نتایج حاصله با مدل‌های کلاسیک

داده‌های مساله از مقاله چاندرا و همکاران [29] است که به ارزیابی ۲۹ کارخانه نساجی کانادا با استفاده از مفهوم بازده به مقیاس در *DEA* پرداخته‌است. این ۲۹ کارخانه نساجی در ۳ حوزه ریسندگی، بافندگی و رنگرزی فعالیت دارند. اطلاعات مربوط به آن‌ها در **جدول ۱۰** آمده‌است. شرح بررسی انجام شده در مقاله چاندرا و همکاران و این مقاله در ذیل آمده‌است. ۶ کارخانه ریسندگی، ۱۰ کارخانه بافندگی و ۱۳ کارخانه رنگ‌رزی در صنعت نساجی کانادا مشارکت دارند؛ به ترتیب با *D,W,S* نمایش داده‌شده‌است. ورودی این کارخانه‌ها تعداد کارکنان (تعداد کارکنان یک عدد صحیح است، کارکنان روزمزد ندارد.) و سرمایه کارخانه است. خروجی هر واحد، درآمد کارخانه است درنتیجه دو ورودی(یک ورودی صحیح، یک ورودی حقیقی) و یک خروجی حقیقی داریم. بازده به مقیاس این کارخانه‌ها با فرض حقیقی بودن تمام ورودی‌ها و خروجی در مقاله با استفاده از مدل‌های کلاسیک (مجموع λ) به‌دست آورده شده‌است (چون عملکرد ۳ کارخانه متفاوت است، بازده به مقیاس را برای هر گروه مجزا حساب کرده‌است). سپس به ارایه مدل‌هایی و پیداکردن مجموعه مرجع از بین واحدهایی با بازده به مقیاس ثابت پرداخته‌است تا مشخص کند برای واحدهای با بازده به مقیاس افزایشی با چه مقدار افزایش ورودی به میزان مطلوب خروجی می‌رسد و برای بازده به مقیاس کاهشی بجای کاهش ورودی با مدل‌های پیشنهادی به دنبال راهی برای عدم کاهش یا کاهش کمتر ورودی است چرا که کاهش ورودی (مانند اخراج کارکنان) حالت مطلوبی برای کارخانه نیست. در این مقاله هدف ما تنها تعیین نوع بازده به مقیاس است، بازده به مقیاس راست و چپ را برای مقایسه به‌طور مجزا مجددا برای هر گروه با استفاده از مدل‌های پیشنهادی محاسبه می‌کنیم،نتایج در **جدول۱۰** آمده است. ستون سوم تا چهارم **جدول۱۰** مقدار ورودی‌ها و خروجی است. ستون پنجم و ششم نوع بازده به مقیاس با استفاده از مدل جدید و ستون هفتم نوع بازده به مقیاس که در مقاله چاندرا و همکاران به آن اشاره‌شده، نوشته‌شده‌است. همان‌طور که در **جدول ۱۰** دیده می‌شود، جز چند مورد، نوع بازده به مقیاس *DMU*ها یکسان نیست. مثلا در واحد *S01*، با مدل جدید نیز بازده به مقیاس چپ و راست افزایشی تعیین شده‌است و در مدل کلاسیک نیز بازده به مقیاس افزایشی است. اما در واحد *S04* بازده به مقیاس چپ و راست هر دو کاهشی است در حالی‌که بازده به مقیاس ثابت برای آن مشخص شده‌بود. با استفاده از مدل‌های کلاسیک واحدهایی مانند *S03, SO6, D01, D03, D04, D07, D11, D13* بازده به مقیاس افزایشی دارند اما با این مدل بازده به مقیاس چپ کاهشی دارند. بازده به مقیاس*D09* کاهشی تعیین شده اما در مدل جدید دارای بازده به مقیاس راست افزایشی است.

چاندرا و همکاران بیان می‌کنند که با مدل‌های *CCR*، کارخانه *D01* باید کارکنان خود را از ۱۲ نفر به ۶٫۴۳۲ نفر و سرمایه‌گذاری ورودی از ۵ میلیون دلار به ۲٫۶۸ میلیون دلار برساند تا درآمد ۱۰ میلیون دلاری (همان درآمد قبلی) حاصل شود و چون کاهش کارکنان، مطلوب مدیر نیست، چاندرا و همکاران نتیجه می‌گیرند با مدل پیشنهادی مدیر می‌تواند کارکنان را به ۹۰ نفر و سرمایه گذاری را به ۳۰ میلیون دلار برساند تا ۱۴ میلیون دلار درآمد داشته باشد که چگونگی رساندن این ورودی‌ها به ورودی مطلوب به اذعان خودشان خود چالش دیگری‌ست! (هدف چاندرا و همکاران تعادل بین کاهش ورودی و افزایش خروجی‌ست و نه صحیح بودن تعداد ورودی‌ها و سعی می‌کند تا ورودی‌های هر*DMU* را به *DMU*های کارای گروه خود برساند.) البته این موضوع مورد بحث در این مقاله نیست، اما همان کاهش تعداد کارکنان به عددی غیرصحیح در نتایج مدل نشان از اهمیت طراحی و پیشنهاد مدل برای داده‌های صحیح است.

Archive of SID.ir

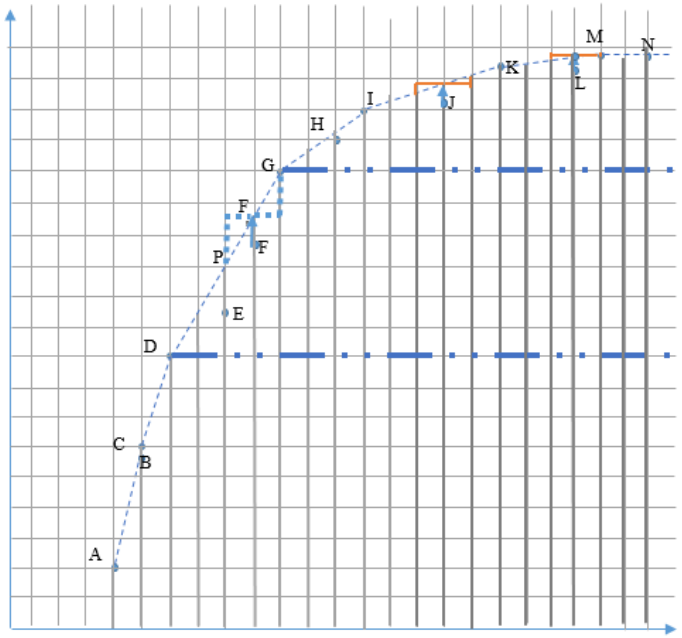
Archive of SID.ir

جدول ۱۰- ورودی‌ها و خروجی ۲۹ کارخانه نساجی در کانادا و مقایسه بازده به مقیاس مشخص شده با روش پیشنهادی.

Table 10- Inputs and outputs of 29 textile mills in Canada and comparing efficiency to scale specified by the proposed method.

ردیف	نام کارخانه	ورودی ۱ تعداد کارکنان	ورودی ۲ سرمایه	خروجی درآمد	RTS –	RTS +	CLASSIC RTS
1	S01	35	40	40	IRS	IRS	IRS
2	S02	103	500	1000	IRS	DRS	CRS
3	S03	75	20	80	DRS	IRS	IRS
4	S04	200	6	150	DRS	DRS	CRS
5	S05	61	20	175	IRS	DRS	CRS
6	S06	150	71	92.35	DRS	IRS	IRS
7	W01	31	40	140	DRS	CRS	CRS
8	W02	72	60	135	IRS	DRS	DRS
9	W03	56	120	180	IRS	DRS	DRS
10	W04	110	150	500	DRS	CRS	DRS
11	W05	165	135	300	IRS	DRS	DRS
12	W06	56	200	100	IRS	DRS	IRS
13	W07	48	80	130	IRS	DRS	IRS
14	W08	15	67	170	DRS	IRS	CRS
15	W09	4	0.85	5	DRS	IRS	CRS
16	W10	3	1.2	2.8	IRS	IRS	IRS
17	D01	12	5	10	DRS	IRS	IRS
18	D02	8	1	6	IRS	IRS	IRS
19	D03	129	45	120	DRS	IRS	IRS
20	D04	99	60	87.5	DRS	IRS	IRS
21	D05	52	8	60	IRS	DRS	CRS
22	D06	90	30	140	CRS	DRS	CRS
23	D07	132	80	100	DRS	IRS	IRS
24	D08	191	45	187.5	DRS	DRS	DRS
25	D09	92	18	100	DRS	IRS	DRS
26	D10	150	35	175	DRS	DRS	DRS
27	D11	41	30	25	DRS	IRS	IRS
28	D12	15	15	20	IRS	IRS	IRS
29	D13	29	30	30	DRS	IRS	IRS

*واحد درآمد و سرمایه میلیون دلار است.

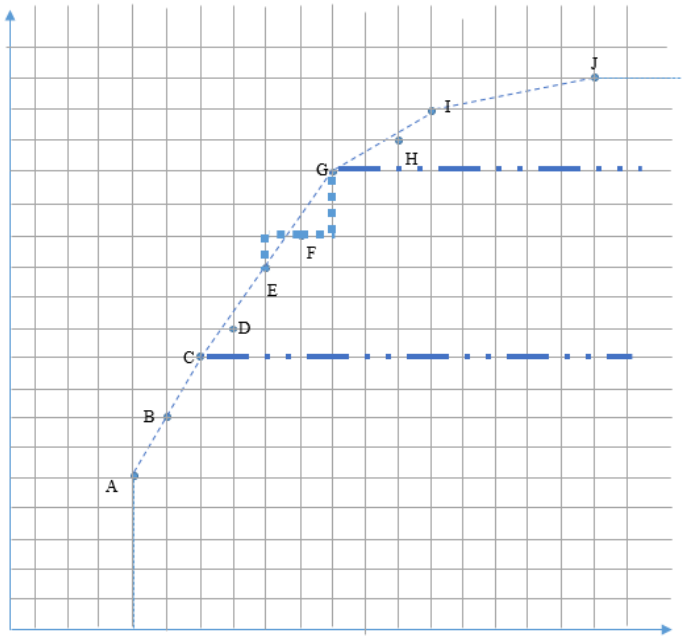


شکل ۱- pps واحدهای تحت ارزیابی (تک‌ورودی صحیح-تک‌خروجی حقیقی).

Figure 1- PPS of the units under evaluation (single integer-valued input-single real output).

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir



شکل ۲- pps واحدهای تحت ارزیابی (تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی صحیح).

Figure 2- PPS of the units under evaluation (single integer-valued input-single integer output).

۵- بحث و نتیجه‌گیری

هدف این مقاله پیشنهاد مدلی برای تعیین نوع و مقدار بازده به مقیاس در داده‌های صحیح است، برای تعیین میزان تغییر به یک مقدار صحیح یک مدل مجزا تعریف شد و سپس واحدهای دیگر (در مدل‌هایی که ورودی غیر صحیح نیز دارند) نیز به همان میزان تغییر می‌کنند تا مقدار تغییر در ورودی‌ها به مقدار یکسان رخ دهد و واحدی که *DMU* برای تعیین نوع بازده به مقیاس نسبت به آن باید سنجیده شود تعیین شود. با استفاده از این مدل‌ها واحدی که *DMU* نسبت به آن سنجیده می‌شود یک واحد با همان ویژگی‌های واحد اصلی از لحاظ صحیح و حقیقی بودنش است و در نتیجه قابل اتکابودن نتایج بررسی بازده به مقیاس را نشان می‌دهد و می‌توان در تصمیم‌گیری از آن استفاده کرد.

همانطور که از مقایسه با **شکل ۱** و **شکل ۲** مشاهده می‌شود بازده به مقیاس*DMU* ها مطابق انتظار نیست. به‌عنوان مثال در **شکل ۲** برای واحدهای *C,D,E* انتظار بازده به مقیاس راست و برای واحدهای *D,E,F* انتظار بازده به مقیاس چپ را داریم (چون روی *MPSS* فرضی با فرض *PPS* کلاسیک قرار گرفته‌اند.) اما باتوجه به این‌که مرز، دیگر مرز تحدب (همانند داده‌های حقیقی) نیست، دیگر نسبت ثابت یا تغییر نسبت طبق یک الگوی منظم رخ نمی‌دهد. تفاوت‌های دیگری نیز در تعیین نوع بازده به مقیاس دیده می‌شود و دیگر **رابطه (۶)** که در آن با توجه به نوع بازده به مقیاس راست یا چپ بتوان یک بازده به مقیاس واحد برای *DMUs* تعیین کرد، صدق نمی‌کند.

با توجه به آن‌چه در این مقاله بررسی شد، بازده به مقیاس در حالت‌های بررسی شده همان روال معمول در بازده به مقیاس برای *DMU*ها با داده‌های حقیقی را ندارد به‌نظر می‌رسد پیدا کردن ارتباط بین بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست همچنین روش‌های دیگر راه‌های بررسی بازده به مقیاس در داده‌های حقیقی تحقیق و پژوهشی با نتایج جالبی به‌همراه داشته است. همچنین بررسی شاخص‌های دیگر در *DEA* به جز بازده به مقیاس با این تعریف احتمالا نتایج متفاوتی را حاصل کند.

منابع مالی

برای تحقیق انجام شده، بودجه یا کمک هزینه‌ای دریافت نشده است.

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلا چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

قدردانی و تشکر

از انجمن ایرانی تحلیل پوششی داده ها به دلیل حمایت علمی از این پژوهش قدردانی می‌شود.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, *2*(6), 429–444.

[2] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, *30*(9), 1078–1092.

[3] Edalatpanah, S. A., Godarzi Karim, R., Khalilian, B., & Partouvi, S. (2020). Data envelopment analysis and efficiency of firms: a goal programing approach. *Innovation management and operational strategies*, *1*(1), 1-16.

[4] Banker, R. D. (1984). Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, *17*(1), 35–44.

[5] Banker, R. D., & Thrall, R. M. (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, *62*(1), 74–84.

[6] Banker, R. D., Cooper, W. W., Seiford, L. M., Thrall, R. M., & Zhu, J. (2004). Returns to scale in different DEA models. *European journal of operational research*, *154*(2), 345–362.

[7] Golany, B., & Yu, G. (1997). Estimating returns to scale in DEA. *European journal of operational research*, *103*(1), 28–37.

[8] Fukuyama, H. (2000). Returns to scale and scale elasticity in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, *125*(1), 93–112.

[9] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., & Zohrehbandian, M. (2005). Finding the efficiency score and RTS characteristic of DMUs by means of identifying the efficient frontier in DEA. *Applied mathematics and computation*, *170*(2), 985–993.

[10] Allahyar, M., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2014). An Improved Approach for Estimating Returns to Scale in DEA. *Bulletin of the malaysian mathematical sciences society*, *37*, 1185–1194.

[11] Allahyar, M., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2015). Negative data in data envelopment analysis: Efficiency analysis and estimating returns to scale. *Computers \& industrial engineering*, *82*, 78–81.

[12] Omidi, M., Rostamy-Malkhalifeh, M., Payan, A., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2017). Determining Left and right Returns to Scale (RTS) and RTS sustainability by using linear programming problems based on simultaneous changes in inputs and outputs. *Journal of new researches in mathematics*, *3*(11), 59–80.

[13] Daneshvar, S., & Adesina, K. A. (2018). Modified variable return to scale back-propagation neural network robust parameter optimization procedure for multi-quality processes. *Engineering optimization*, *51*(8), 1352–1369.

[14] Saleh, H., Hosseinzadeh, F., Rostamy, M., & Shafiee, M. (2020). Performance evaluation and specifying of Return to scale in network DEA. *Journal of advanced mathematical modeling*, *10*(2), 309–340.

[15] Qamar, A., Ashfaq, M., & Khan, M. T. I. (2017). Resource use efficiency and return to scale analysis in off-season cucumber production in Punjab, Pakistan. *Sarhad journal of agriculture*, *33*(1), 47–52.

[16] Situmorang, J. W. (2018). A review input factors elasticity and return to scale of cooperative: a survey on Indonesian savings-loan cooperatives. *Independent journal of management \& production*, *9*(4), 1274–1290.

[17] Czyżewski, B., Smedzik-Ambroży, K., & Mrówczyńska-Kamińska, A. (2020). Impact of environmental policy on eco-efficiency in country districts in Poland: How does the decreasing return to scale change perspectives? *Environmental impact assessment review*, *84*, 106431. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195925520300561

[18] Lozano, S., & Villa, G. (2006). Data envelopment analysis of integer-valued inputs and outputs. *Computers \& operations research*, *33*(10), 3004–3014.

[19] Kuosmanen, T., & Matin, R. K. (2009). Theory of integer-valued data envelopment analysis. *European journal of operational research*, *192*(2), 658–667.

[20] Matin, R. K., & Kuosmanen, T. (2009). Theory of integer-valued data envelopment analysis under alternative returns to scale axioms. *Omega*, *37*(5), 988–995.

[21] Khezrimotlagh, D., Salleh, S., & Mohsenpour, Z. (2012). A comment on theory of integer-valued data envelopment analysis. *Applied mathematical sciences*, *6*(116), 5769–5774.

[22] Khezrimotlagh, D. (2015). Differences between real and integer production possibility sets in data envelopment analysis. *ArXiv preprint arxiv:1501.07401*.

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

[23] Zhou, Z., Guo, X., Wu, H., & Yu, J. (2018). Evaluating air quality in China based on daily data: Application of integer data envelopment analysis. *Journal of cleaner production*, *198*, 304–311.

[24] Ren, J., Chen, C., & Gao, B. (2020). Additive integer-valued DEA models with fuzzy undesirable outputs: closest benchmarking targets and super-efficiency. *IEEE access*, *8*, 124857–124868. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3007837

[25] Chen, C., Liu, H., Tang, L., & Ren, J. (2021). A range adjusted measure of super-efficiency in integer-valued data envelopment analysis with undesirable outputs. *Journal of systems science and information*, *9*(4), 378–398.

[26] Hosseini Monfared, S. N., Hosseinzadeh Lotfi, F., Mozaffari, M. R., & Rostamy Malkhalifeh, M. (2021). Classifying flexible and integer data in two-stage network data envelopment analysis. *Journal of applied research on industrial engineering*, *8*(3), 270–289.

[27] Taleb, M., Khalid, R., & Ramli, R. (2019). Estimating the return to scale of an integer-valued data envelopment analysis model: efficiency assessment of a higher education institution. *Arab journal of basic and applied sciences*, *26*(1), 144–152.

[28] Taleb, M., Khalid, R., Ramli, R., Ghasemi, M. R., & Ignatius, J. (2022). An integrated bi-objective data envelopment analysis model for measuring returns to scale. *European journal of operational research*, *296*(3), 967–979.

[29] Chandra, P., Cooper, W. W., Li, S., & Rahman, A. (1998). Using DEA to evaluate 29 Canadian textile companies—considering returns to scale. *International journal of production economics*, *54*(2), 129–141.

Archive of SID.ir