دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مدل تحلیل پوششی داده‌های ترکیبی برای حل مسائل تصمیم‌گیری با اعداد GTHF

طیبه رضائی تازیانی[۱]، مهناز برخورداری احمدی[۲*]، محمد رضا بلوچ شهریاری[۱]

(۱) گروه ریاضی، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد بندرعباس، دانشگاه آزاد اسلامی، بندرعباس، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۱۴

چکیده

برای مواجهه با عدم قطعیت در جهان واقعی، منطق دو ارزشی به تدریج جای خود را به منطق فازی داده است. در برخی از مسائل دنیای واقعی تعیین دقیق مقدار عضویت کار دشواری است و تصمیم‌گیری با شک و تردید همراه است. این دیدگاه جدید، عدم قطعیت ناشی از تردید را مدیریت می‌کند. اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته (GTHF) که درجه عضویت آن‌ها توسط چندین عدد فازی ذوزنقه‌ای بیان می‌شود، برای حل مساله تصمیم‌گیری در زندگی واقعی نسبت به اعداد حقیقی مناسب‌تر است. در این مقاله، به مفهوم جدیدی به نام اعداد فازی مردد ذونقه‌ای تعمیم یافته و ترکیب آن با تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. با استفاده از این اطلاعات مقادیر انحراف و امتیاز را به عنوان ورودی و خروجی مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای در نظر می‌گیریم، سپس از نتایج حاصل جهت ساخت ماتریس مقایسه زوجی استفاده کردیم و در نهایت واحدهای تصمیم‌گیرنده را اولویت‌بندی نمودیم. برای استفاده از برخی از مفاهیم در روش تصمیم‌گیری پیشنهادی، ابتدا تعاریفی از مفاهیمی مانند تابع امتیاز و تابع انحراف از اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته را ارائه می‌دهیم. در نهایت، یک مثال عددی برای روش پیشنهادی جهت تایید و کاربردی بودن آن ارائه و نتیجه رتبه‌بندی را با روش‌های AP، TOPSIS با اعداد GTHF و روش تجمع هندسی وزن دار در [۹] مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌های فازی مردد، اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته (GTHF)، تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه-بندی.

*. عهده دار مکاتبات
Email: mahnaz_barkhordari@yahoo.com

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیر پارامتریک برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده مانند شعبه‌های بانک، مدارس، بیمارستان‌ها، دفاتر پستی، شرکت‌ها و غیره می‌باشد. در سال ۱۹۷۸ چارنز، کوپر و رودز [۵] مدل CCR از روش DEA را ارائه دادند. پس از مقاله اصلی CCR، رشد چشمگیری از چاپ و نشر در زمینه DEA به وجود آمد. در سال‌های بعد، تعداد زیادی از محققان حجم قابل‌توجهی از مقالات را در مورد DEA انتشار دادند. کاربردهای عملی DEA از توسعه نظری در این زمینه متابعت می‌کند، حال آن که کاربردها هستند که جنبه‌های اهمیت عملی را که تحقیق باید به آن بپردازد، برجسته می‌کنند. مدل‌های DEA موجود معمولاً به ورودی‌ها و خروجی‌های متداول قطعی محدود می‌شوند. اما در برخی از موارد، داده‌های ورودی و خروجی DMU ها را نمی‌توان به‌طور دقیق اندازه‌گیری کرد. به عنوان مثال، کیفیت خدمات، کیفیت منابع ورودی، میزان رضایت و غیره. بنابراین نظریه عدم قطعیت نقش مهمی را در DEA ایفا کرده‌است. در این موارد، داده‌های دارای عدد قطعی نیازهای واقعی را برآورده نمی‌کنند و این محدودیت انعطاف‌پذیری عملی DEA در کاربرد را کاهش می‌دهد. بنابراین، داده‌ها را می‌توان به عنوان یک متغیر زبانی با مجموعه‌های فازی نشان داد. اولین بار زاده [۳۴] در سال ۱۹۶۵ نظریه مجموعه‌های فازی را فقط با درجه عضویت برای مدل‌سازی اطلاعات حاوی عدم اطمینان در زندگی واقعی مطرح کرد. مدل‌های بسط یافته براساس مجموعه فازی به‌طور مداوم توسعه داده می‌شوند. به‌عنوان مثال، مجموعه فازی شهودی [۴]، مجموعه فازی مردد [۲۶]، دوگان مجموعه فازی مردد [۳۳]، مجموعه اصطلاحات فازی مردد [۲۱]، مجموعه فازی مردد مثلثی [۳۲] و غیره. تورا و نارکاوا [۲۷] و تورا [۲۶] مفهوم مجموعه فازی مردد را به عنوان تعمیمی از مجموعه فازی پیشنهاد کردند که اجازه عضویت یک عنصر به یک مجموعه را می‌دهد که توسط چندین مقدار ممکن نشان داده می‌شود. بنابراین، مجموعه‌های فازی مردد می‌توانند اطلاعات اصلی ارائه‌شده توسط تصمیم گیرندگان را تا حد ممکن منعکس و توجه تعداد زیادی از محققان را جلب کنند. از این رو، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته و کاربردهای آنها توسط کیان و وانگ [۱۹] در سال ۲۰۱۳ بحث گردید. بحث در مورد کاربرد مجموعه‌های فازی مردد اهمیت زیادی پیدا کرده‌است. به عنوان مثال، در رویکرد مبتنی بر تصمیم‌گیری (چن و همکاران [۶]؛ لیائو و ژو [۱۵]؛ پنگ و همکاران [۱۸]؛ وانگ و همکاران[۲۹]؛ ژائو و همکاران [۳۶]؛ ژو و همکاران [۳۵])، در زمینه معیار در اندازه‌گیری تشابه و فاصله (چن و همکاران [۶]؛ پنگ و همکاران [۱۸]؛ ژائو و همکاران [۳۶])، در مورد عملگرهای تجمع (لیائو و خو[۱۶و۱۵]). گسترش چشمگیر اعداد فازی مردد توجه محققان بر روی عدد فازی مکعبی مثلثی را جلب کرده‌است، امین و فهمی [۳]؛ در ادامه الکنتود و همکاران [۱] با مروری بر عدد فازی مردد به توسعه آنها پرداخته و مجموعه‌های فازی مردد توسعه یافته دوآل را مطرح کردند. سپس عمگرهای تجمعی برای مجموعه‌های فازی زبانی مردد بیان گردید(رانگ و همکاران [۲۲]). مجموعه فازی مردد نیز دارای اشکالاتی است، زیرا تنها درجات عضویت یک عنصر را به یک مجموعه داده‌شده تنها توسط اعداد گسسته بین ۰ و ۱ نشان می‌دهد. اما یک مجموعه فازی مردد ذوزنقه‌ای دارای اعداد فازی ذوزنقه‌ای با فواصل پشتیبانی متفاوت روی به جای اعداد گسسته بین ۰ و ۱ است. برای مثال فرض کنید دو مجموعه داریم،

$$\{(x,\{0.1,0.6,0.2\}),(y,\{0.6,0.8\})\}$$

یک مجموعه فازی مردد

و { (1,2,3,4) , (2,3,3,4) , (1,2,7,8) }

یک مجموعه فازی مردد ذوزنقه‌ای باشد. از این رو، یی [۳۱] مجموعه‌های فازی مردد را به مجموعه‌های فازی ذوزنقه‌ای مبتنی بر ترکیب مفاهیم اعداد فازی ذوزنقه‌ای و مجموعه‌های فازی مردد گسترش داد، که درجه عضویت یک عنصر به یک مجموعه داده‌شده توسط چندین عدد فازی ذوزنقه‌ای مختلف در مجموعه اعداد حقیقی بیان می‌شود، که برای توصیف درجه عضویت نا دقیق یک عنصر به یک مجموعه داده شده است. از طرفی زمانی که با معیارهای مختلفی روبرو باشیم، AHP و TOPSIS از تکنیک‌های اصلی برای حل مسائل MCDM هستند. روش AHP توسط ساعتی [۲۳] در سال ۱۹۸۰ ایجاد گردید. رویکرد AHP با رفتار یک تصمیم‌گیرنده مطابقت دارد. نقطه قوت این رویکرد این است که به‌طور منظم عوامل ملموس و نامشهود را سازمان می‌دهد و یک راه حل ساختاری اما نسبتاً ساده برای مسائل تصمیم‌گیری ارائه می‌دهد. TOPSIS نیز تکنیکی است که به‌طور همزمان هر دو کوچکترین فاصله را از راه حل ایده آل مثبت و بیشترین فاصله را از راه حل ایده‌آل منفی در نظر می‌گیرد. رتبه بندی یک گزینه بستگی به نسبت اندازه‌گیری این دو فاصله دارد.از این رو، اوماماهواری و کوماری [۲۸] دو روش تصمیم‌گیری چند معیاره به نام تکنیک برای ارجاع سفارش با تشابه به راه‌حل ایده‌آل (TOPSIS) و روش‌های VIKOR را براساس تئوری فازی مردد توسعه دادند. سپس پاتیناتان و جانسون [۱۷] روش متفاوتی براساس TOPSIS در اعداد فازی مردد ارائه دادند. اخیرا دلی [۸] روش TOPSIS با اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته را برای انتخاب روبات ارائه داده است. برخی از محققان نیز چند مدل فازی را برای ارزیابی کارایی DMUها با داده‌های فازی پیشنهاد کرده‌اند [۱۳،۱۰،۱۲].

همچنین، برخی از مدل های تجزیه و تحلیل پوششی داده ای فازی (FDEA) با ترکیب مجموعه فازی و مدل تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) برای مقابله با داده‌های نادقیق و مبهم توسعه داده شد. برخی از محققان تلاش می‌کنند تا ارزیابی و رتبه بندی کاملی از واحدهای تصمیم‌گیرنده را ارائه دهند. شانگ و سوییشی[۲۴] از نتایج ذهنی AHP در DEA برای داشتن یک سیستم تولید انعطاف پذیر استفاده کردند. سیونانی استرن و همکاران [۲۵] نیز یک مدل ترکیبی برای ارزیابی و رتبه‌بندی DMUها ارائه کردند، که در آن مقایسه زوجی DMUها را بدون استفاده از واحدهای دیگر بکار می‌برد و برای چندین ورودی و خروجی نتایج رتبه بندی با مدل کلاسیک DEA سازگار نمی باشد. در حالی که در مدل پیشنهادی در این مقاله ارزیابی هر جفت واحد تصمیم‌گیری با مقایسه عملکرد تمام واحدهای تصمیم‌گیری انجام می‌گیرد. برای پوشش ناسازگاری در [۲۵]، رویکردهای AHP/DEA توسعه یافته توسط برخی از محققان در [۲۰و۷و۲] مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به مبهم بودن مسائل تصمیم‌گیری در دنیای واقعی، رویکردی مدل سازی متفاوتی در محیط‌های فازی مختلف معرفی شده است. از این رو در ادامه دلی و کاراسلان [۹] اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته را برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره به کار بردند. اعداد فازی ذوزنقه‌ای مردد تعمیم‌یافته که درجه عضویت آن‌ها توسط چندین عدد فازی ذوزنقه‌ای بیان می‌شود، برای حل مسائل تصمیم‌گیری در زندگی واقعی نسبت به اعداد حقیقی مناسب‌تر است. این مقاله در راستای ارائه مدل ساده و موثر CCR است که در آن مدل DEA به عنوان یک مدل CCR با مجموعه امکان تولید پیشنهادی است که برای ارزیابی کارایی و رتبه‌بندی DMUها با ترکیب مساله تصمیم‌گیری چند معیاره با معیارهای فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته توسعه داده شده‌است.

ادامه مقاله به شرح زیر است.

در بخش ۲، تعاریف مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی مردد، همچنین مفاهیم تابع امتیاز و تابع انحراف مجموعه‌های فازی مردد، اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته (GTHF) که درجه عضویت یک عنصر در یک مجموعه داده‌شده توسط چندین عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته در مجموعه اعداد حقیقی بیان می‌شوند، تعریف می‌شوند. سپس، برخی از قوانین اساسی عملیاتی اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته و بررسی برخی خواص مورد نظر و عملگر هندسی وزن‌دار عدد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته ارائه می‌شوند، همچنین مروری بر الگوریتم TOPSIS با اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته در بخش ۳ ارائه شده‌است. روش رتبه‌بندی با داده‌های فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته دلی و کاراسلان[۹] و روش پیشنهادی ترکیبی به همراه الگوریتم آن برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره که در آن مقادیر معیارها به شکل اطلاعات فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته هستند در بخش ۴ ارائه می‌شود. در بخش ۵، یک مثال کاربردی و تحلیل مقایسه‌ای بیشتر برای تایید روش به همراه نتایج رتبه‌بندی سایر روش‌ها نیز ارائه شده‌است. این مقاله در بخش ۶ نتیجه‌گیری و به پایان می‌رسد.

۲. مفاهیم مقدماتی

تعریف ۲-۱:[۳۴] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. مجموعه فازی A روی X بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{ x, \mu_A(x) \ | x \in X\},$$

که $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ برای $x \in X$.

تعریف ۲-۲: [۱۳] فرض کنید $w_{\tilde{a}} \in [0,1]$ و $a, b, c, d \in$ بطوری که $a \le b \le c \le d$.

بنابراین یک عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته $\tilde{a} = (a, b, c, d); w_{\tilde{a}}$ یک مجموعه فازی خاص روی مجموعه اعداد حقیقی است، که تابع عضویت آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} (x - a)w_{\tilde{a}}/(b - a) & (a \le x < b) \\ w_{\tilde{a}} & (b \le x \le c) \\ (d - x)w_{\tilde{a}}/(d - c) & (c < x \le d) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

اگر قرار دهیم $w_{\tilde{a}} = 1$، آنگاه عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته به (a, b, c, d) تبدیل می‌شود و عدد فازی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود [۱۰].

HFS نیز در ابتدا توسط تورا[۲۲] معرفی گردید. HFS تعمیمی از مجموعه‌های فازی است که شرایطی را کنترل می‌کند که در آن مجموعه‌ای از مقادیر برای عضویت یک عنصر ممکن باشد. تورا و نارکاوا[۲۳] مشکل تعیین مقدار عضویت یک عنصر در یک مجموعه را ذکر کرده و مشخص کردند که HFS می‌تواند در مواردی استفاده شود که عدم قطعیت در مقادیر عضویت ممکن، محدود باشد. در چنین مواردی HFS می‌تواند موقعیت را نشان دهد و به جای استفاده از عملگر تجمع برای به دست آوردن یک مقدار واحد، پرداختن به تمام مقادیر ممکن مفید است. به‌طور کلی، در سطوح مختلف فرآیند تصمیم‌گیری، افراد ممکن است در ارائه اولویت‌های خود تردید داشته باشند، در این شرایط HFS می‌تواند برای نشان دادن اولویت‌ها استفاده شود. تورا و نارکاوا، HFS را به صورت زیر تعریف می‌کند:

تعریف ۲-۳: [۲۳] فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد، یک HFS در X را با تابعی مانند ξ نظیر می‌کنیم، که زیر مجموعه‌ای از بازه [۱،۰] را می‌دهد.

$$E = \{ x, \xi(x) \ | x \in X\},$$

که مجموعه مقادیر $\xi(x)$ در [۱،۰]، نشان دهنده درجه عضویت‌های ممکن عنصر $x \in X$ نسبت به مجموعه E می‌باشد. خیا و خو [۲۶]، $\xi = \xi(x)$ را یک عنصر فازی مردد (HFE) از E نامیدند، که H مجموعه تمام عناصر فازی مردد E است.

تعریف ۲-۴: [۳۰] برای مقایسه HFE ها تابع امتیاز را معرفی کردند. چند سال پس از آن چن و همکاران [۶] برای مقایسه HFEها تابع انحراف مبتنی بر امتیاز را ارائه کردند. محاسبات و مقایسه‌های مربوط به HFEها، تابع امتیاز و تابع انحراف به صورت زیر داده شده است:

فرض کنید ξ یک عنصر فازی مردد باشد، آنگاه

۱. نمره یا امتیاز ξ بوسیله $S(\xi)$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر است:

$S(\xi) = \frac{1}{N(h)}\sum_{\mu\in\xi}\mu$ بطوری که μ درجه عضویت‌های ممکن از ξ و $N(h)$ تعداد عناصر موجود در ξ است.

۲. درجه انحراف ξ با $D(\xi)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$D(\xi) = [\frac{1}{N(h)}\sum_{\mu\in\xi}(\mu \quad S(\xi))^2]^{\frac{1}{2}}$تابع انحراف ξ نامیده می‌شود که در آن μ درجه عضویت های ممکن از ξ و $N(h)$ تعداد عناصر موجود در ξ است و $S(\xi) = \frac{1}{N(h)}\sum_{\mu\in\xi}\mu$ تابع امتیاز ξ می‌باشد.

تعریف ۲-۵: [۶] اگر ξ^1 و ξ^2 دو HFE، $S(\xi^1)$ و $S(\xi^2)$ بترتیب توابع امتیاز ξ^1 و ξ^2 و $D(\xi^1)$ و $D(\xi^2)$ بترتیب توابع انحراف ξ^1 و ξ^2 باشند داریم:

۱. اگر $S(\xi^1) > S(\xi^2)$، آنگاه $\xi^1 \quad \xi^2$

۲. اگر $S(\xi^1) = S(\xi^2)$، آنگاه

(a) اگر $D(\xi^1) < D(\xi^2)$ آنگاه $\xi^1 \quad \xi^2$

(b) اگر $D(\xi^1) > D(\xi^2)$ آنگاه $\xi^1 \quad \xi^2$

(c) $D(\xi^1) = D(\xi^2)$ آنگاه $\xi^1 \sim \xi^2$

برخی عملیات در HFE ها به صورت زیر می‌باشد:

اگر ξ، ξ^1 و ξ^2 سه عنصر فازی مردد و $\lambda > 0$ باشد، آنگاه

(a) عملیات مجموعه‌ای روی عناصر فازی مردد در تورا و نارکاوا [۲۷] به شرح زیر است:

$$\xi^c = \quad_{\mu\in\xi}\{1 \quad \mu\} \qquad (۱)$$

$$\xi^1 \cup \xi^2 = \quad_{\mu^1\in\xi^1,\mu^2\in\xi^2}\max\{\mu^1,\mu^2\} \qquad (۲)$$

$$\xi^1 \cap \xi^2 = \quad_{\mu^1\in\xi^1,\mu^2\in\xi^2}\min\{\mu^1,\mu^2\} \qquad (۳)$$

(b) عملیات حسابی عناصر فازی مردد ارائه شده توسط خیا و خو [۳۰] بصورت زیر است:

$$\xi^\lambda = \quad_{\mu\in\xi}\{\mu^\lambda\}, \quad \lambda > 0 \qquad (۱)$$

$$\lambda\xi = \quad_{\mu\in\xi}\{1 \quad (1 \quad \mu)^\lambda\}, \ \lambda > 0 \qquad (۲)$$

$$\xi^1 + \xi^2 = \quad_{\mu^1\in\xi^1,\mu^2\in\xi^2}\{\mu^1 + \mu^2 \quad \mu^1.\mu^2\} \qquad (۳)$$

$$\xi^1 \times \xi^2 = \quad_{\mu^1\in\xi^1,\mu^2\in\xi^2}\{\mu^1.\mu^2\} \qquad (۴)$$

$$\xi^1 \quad \xi^2 = \quad_{\mu^1\in\xi^1,\mu^2\in\xi^2}\{\mu \},\qquad (۵)$$

$$\mu \ = \begin{cases}\mu^1 \quad \mu^2/1 \quad \mu^2 & \mu^1 \geq \mu^2,\ \mu^2 \neq 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\frac{\xi^1}{} \ \xi^2 = \quad_{\mu^1\in\xi^1,\mu^2\in\xi^2}\{\mu \},\qquad (۶)$$

$$\mu \ = \begin{cases}\mu^1/\mu^2 & \mu^1 \leq \mu^2,\ \mu^2 \neq 0\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

تعریف ۲-۶: [۳۱] فرض کنید X یک مجموعه ثابت باشد و $a_i, b_i, c_i, d_i \in$ بطوری که $a_i \leq b_i \leq c_i \leq d_i$، $(i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\})$

آنگاه یک مجموعه فازی مردد ذوزنقه‌ای روی X بصورت زیر تعریف می‌شود:

$E = \{\ x, \{(a_i, b_i, c_i, d_i): i \in I_n \ : x \in X\}$

که $\{(a_i, b_i, c_i, d_i): i \in I_n\}$ مجموعه‌ای از برخی از اعداد فازی ذوزنقه‌ای مختلف در مجموعه اعداد حقیقی ، برای نشان دادن توابع عضویت ممکن از عناصر $x \in X$ است.

تعریف ۲-۷: [۹] فرض کنید X یک مجموعه ثابت باشد و $\xi_i \in [0,1]$ و $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ یا $\{1, \dots, m\}$ یا ...) و $a_i, b_i, c_i, d_i \in$ بطوری که $(i \in I)$ $a_i \le b_i \le c_i \le d_i$. آنگاه یک مجموعه فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \{\ x, \{\ (a_i, b_i, c_i, d_i); \xi_i\ : i \in I\}\ , x \in X\}$$

که $\{\ (a_i, b_i, c_i, d_i); \xi_i\ : i \in I\}$ مجموعه‌ای از برخی از اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته مختلف در مجموعه اعداد حقیقی ، برای نشان دادن توابع عضویت ممکن از عناصر $x \in X$ است.

برای برخی از مقادیر خاص پارامترهای a_i, b_i, c_i, d_i می‌توانیم فرم‌های خاصی از اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته را بسازیم مانند اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته تک مقداری که بصورت زیر است:

اگر $a = a_i, b = b_i, c = c_i, d = d_i$ به ازای هر $i \in I$، آنگاه عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته (GTHF-number) به عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته تک مقداری تقلیل می‌یابد

$$\xi_{GTFN} = \ (a_i, b_i, c_i, d_i); \{\xi_i : \xi_i \in \xi(x), \xi(x)\ \in [0,1]$$

که $\xi(x)$ مجموعه برخی از مقادیر در $[0,1]$ است. این یک مجموعه فازی مردد خاص در است، و تابع عضویت آن بصورت (۱) تعریف می‌شود:

$$\mu^{i}(x) = \begin{cases} (x \quad a)\xi_i/(b \quad a) & (a \le x < b) \\ \xi_i & (b \le x \le c) \\ (d \quad x)\xi_i/(d \quad c) & (c < x \le d) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad (۱)$$

برخی عملیات حسابی در اعداد GTHF بصورت زیر می‌باشد:

تعریف ۲-۸: [۹] فرض کنید داشته باشیم $\xi_{GTHFN} = \ (a, b, c, d); \xi(x)$، $\xi^1_{GTHFN} = (a_1, b_1, c_1, d_1); \xi^1 = \xi^1(x)$ و $\xi^2_{GTHFN} = \ (a_2, b_2, c_2, d_2); \xi^2 = \xi^2(x)$ اعداد GTHF روی باشند و $\gamma \neq 0$، آنگاه

$$(a)\ \ \xi^1_{GTHFN} \oplus \xi^2_{GTHFN} = \ (a_1 + a_2, b_1 + b_2,\ c_1 + c_2,\ d_1 + d_2);\ \ _{\xi^1_1 \in \xi^1, \xi^2_1 \in \xi^2} \{\xi^1_1 + \xi^2_1 \quad \xi^1_1 . \xi^2_1\}\ ,$$

$$(b)\ \ \xi^1_{GTHFN} \quad \xi^2_{GTHFN} = \ (a_1 \quad d_2, b_1 \quad c_2,\ c_1 \quad b_2,\ d_1 \quad a_2);\ \ _{\xi^1_1 \in \xi^1,\ \xi^2_1 \in \xi^2} \{\xi\ \}$$

که

$$\xi\ = \begin{cases} \xi^1_1 \quad \xi^2_1/1 \quad \xi^2_1 & \xi^1_1 \ge \xi^2_1,\ \xi^2_1 \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(c)\ \ \gamma\, \xi_{GTHFN} = \ (\gamma a, \gamma b, \gamma c, \gamma d);\ \ _{\xi \in \xi(x)} \left\{1 \quad (1 \quad \xi)^{\gamma}\right\}\ \ (\gamma \ge 0),$$

$$(d)\ \ (\ \xi_{GTHFN})^{\gamma} = \left(a^{\gamma},\ b^{\gamma},\ c^{\gamma},\ d^{\gamma}\right);\ \ _{\xi \in \xi(x)} \{\xi^{\gamma}\}\ \ (\gamma \ge 0).$$

تعریف ۲-۹: [۹] فرض کنید $\xi_{GTHFN} = \ (a, b, c, d); \xi_{GTHFN}(x)$ یک GTHF-number، $h = \ _{\mu \in h}\{\mu\}$ و $N(h)$ تعداد عناصر موجود در ξ_{GTHFN} باشد، آنگاه

۱. امتیاز ξ_{GTHFN} بوسیله $S(\xi_{GTHFN}\ )$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر است:

$$S(\xi_{GTHFN}\ ) = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2.N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} \mu$$

بطوری که μ درجه عضویت‌های ممکن از ξ_{GTHFN} و $N(h)$ تعداد عناصر موجود در ξ_{GTHFN} است.

۲. تابع انحراف ξ_{GTHFN} با $D(\xi_{GTHFN})$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(\xi_{GTHFN}) = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2}\left[\frac{1}{N(h)}\sum_{\mu\in\xi_{GTHFN}}(\mu - S(\xi_{GTHFN}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

تابع انحراف ξ_{GTHFN} نامیده می‌شود که در آن μ درجه عضویت‌های ممکن از ξ_{GTHFN} و $N(h)$ تعداد عناصر موجود در ξ_{GTHFN} است و $S(\xi_{GTHFN}) = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2.N(h)}\sum_{\mu\in\xi_{GTHFN}}\mu$ تابع امتیاز ξ_{GTHFN} می‌باشد.

اگر ξ^1_{GTHFN} و ξ^2_{GTHFN} دو عدد GTHF، $S(\xi^1_{GTHFN})$ و $S(\xi^2_{GTHFN})$ به ترتیب توابع امتیاز ξ^1_{GTHFN} و ξ^2_{GTHFN} و $D(\xi^1_{GTHFN})$ و $D(\xi^2_{GTHFN})$ به ترتیب توابع انحراف ξ^1_{GTHFN} و ξ^2_{GTHFN} باشند، داریم:

(۱) اگر $S(\xi^1_{GTHFN}) > S(\xi^2_{GTHFN})$، آنگاه $\xi^1_{GTHFN} \quad \xi^2_{GTHFN}$

(۲) اگر $S(\xi^1_{GTHFN}) = S(\xi^2_{GTHFN})$، آنگاه

(a) اگر $D(\xi^1_{GTHFN}) < D(\xi^2_{GTHFN})$ آنگاه $\xi^1_{GTHFN} \quad \xi^2_{GTHFN}$

(b) اگر $D(\xi^1_{GTHFN}) > D(\xi^2_{GTHFN})$ آنگاه $\xi^1_{GTHFN} \quad \xi^2_{GTHFN}$

(c) اگر $D(\xi^1_{GTHFN}) = D(\xi^2_{GTHFN})$ آنگاه $\xi^1_{GTHFN} \sim \xi^2_{GTHFN}$

تعریف ۲-۱۰: [۸] فرض کنید $\xi^j_{GTHFN},\ j \in I_n$ مجموعه‌ای از اعداد GTHF باشند. اگر

$$H^G_w(\xi^1_{GTHFN}, \xi^2_{GTHFN}, \dots, \xi^n_{GTHFN}) = \bigotimes_{j=1}^{n} {\xi^j_{GTHFN}}^{w_j} = \left(\prod_{j=1}^n {a_j}^{w_j}, \prod_{j=1}^n {b_j}^{w_j}, \prod_{j=1}^n {c_j}^{w_j}, \prod_{j=1}^n {d_j}^{w_j}\right); \bigcup_{\xi^1_1\in\xi^1, \xi^2_1\in\xi^2, \dots, \xi^n_1\in\xi^n}\left\{\prod_{j=1}^n {\xi^j_1}^{w_j}\right\}$$

آنگاه H^G_w عملگر هندسی وزنی عدد GTHF از بعد n نامیده می‌شود، که در آن $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ بردار وزن $\xi^j_{GTHFN},\ j \in I_n$ با $w_1 \in [0,1]$ و $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ می‌باشد.

۳. بخش مروری تحلیل پوششی HFS و TOPSIS-GTHFN

۱.۳. تحلیل پوششی HFS

استفاده از محاسبات بالا و توسعه آن‌ها جهت رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیری پیچیده و زمان بر است، بنابراین در این بخش تحلیل پوششی HFS، که توسط ژو و همکاران (۲۰۱۸) تحلیل پوششی فازی مردد (HFEA) نام گرفته و ارائه شده است را مرور می‌کنیم. معادله اصلی تحلیل پوششی HFS بر مبنای تعریف کارایی در DEA ارائه شده است، که طبق معادله (۲) کارایی تحلیل پوششی فازی مردد تعریف می‌شود:

$$\frac{\sum_{i=1} p_i \times Output}{\sum_{i=1} q_i \times Intput} \qquad \frac{\sum_{i=1} p_i \times Score}{\sum_{i=1} q_i \times Deviation}, \qquad (۲)$$

که p_i و q_i مقادیر وزنی هستند.

تعریف۳-۱۱: [۳۵] اگر k، HFS که بصورت $H_j\ (j = 1, \dots, k)$ نشان داده شده باشد، برای ارزیابی k گزینه $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ با n معیار $(y_1, y_2, \dots, y_n)$، آنگاه هر H_e شامل n،HFE است و کارایی پوششی H_e، یعنی m_e بصورت زیر است:

$$m_e = \frac{p_1 s_{1e} + p_2 s_{2e} + \quad + p_n s_{ne}}{q_1 d_{1e} + q_2 d_{2e} + \quad + q_n d_{ne}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i s_{ie}}{\sum_{i=1}^n q_i d_{ie}} \quad (۳)$$

که $H_e = \{h_{1e}, h_{2e}, \dots, h_{ne}\}$ یک HFS است. $h_{ie} = \cup_{\gamma\in h_{ie}}\{\gamma\}$ یک HFE $p_i\, s_{ie}$ و $q_i\, d_{ie}$ بترتیب امتیاز وزنی و مقادیر انحراف هستند، $s_{ie}, d_{ie} \in [0,1]$، $e=\{1,2,\dots,k\}$ و $i=1,2,\dots,n$. چون $p_i \geq 0$ و $q_i \geq 0$. بنابراین معادله (۴) می‌تواند بدست آید:

$$\sum_{i=1}^n p_i s_{ij} / \sum_{i=1}^n q_i d_{ij} \leq 1, \quad j \in \{1,2,\dots,k\} \quad (۴)$$

با استفاده از معادلات (۳) و (۴) مدل HFEA بصورت زیر ساخته شده است:

$$\max m_e = \frac{p_1 s_{1e} + p_2 s_{2e} + \ \ + p_n s_{ne}}{q_1 d_{1e} + q_2 d_{2e} + \ \ + q_n d_{ne}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i s_{ie}}{\sum_{i=1}^{n} q_i d_{ie}}$$

$$\begin{aligned} &\text{s.t.}\\ &\sum_{i=1}^{n} p_i s_{ij} / \sum_{i=1}^{n} q_i d_{ij} \le 1,\ j = 1,2,\dots,k,\\ &S_{ij} = \frac{1}{N(h_{ij})} \sum_{\gamma \in h_{ij}} \gamma,\ i = 1,2,\dots,n,\\ &j = 1,2,\dots,k \qquad (۵)\\ &d_{ij} = \frac{1}{N(h_{ij})} \sum_{\gamma \in h_{ij}} \sqrt{(\gamma \quad S_{ij})^2},\\ &i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,k,\\ &p_i \ge 0, q_i \ge 0, i = 1,2,\dots,n,\\ &e \in \{1,2,\dots,k\} \end{aligned}$$

بطوری که $h_{ij} = \cup_{\gamma \in h_{ij}} \{\gamma\}$ یک HFE است. p_i و q_i مقادیر وزنی، $p_i\, s_{ij}$ و $q_i\, d_{ij}$ بترتیب امتیاز وزنی و مقادیر انحراف هستند $s_{ij}, d_{ij} \in [0,1]$، i=1,2,…,n و j=1,2,…,k که بترتیب تابع امتیاز و تابع انحراف نیز نامیده می‌شوند. معادله (۵) چون برنامه‌ریزی غیر خطی است و بدست آوردن جواب بهینه آن دشوار است، به فرم خطی تبدیل می‌شود. دوآل مدل خطی شده فوق بصورت (۶) است:

$$\begin{aligned} &\min \pi_e\\ &\text{s.t.}\\ &\sum_{j=1}^{k} \sigma_j d_{ij} \le \pi_e d_{ie}\\ &i = 1,2,\dots,n, e \in \{1,2,\dots,k\} \qquad (۶)\\ &\sum_{j=1}^{k} \sigma_j s_{ij} \ge s_{ie}\\ &i = 1,2,\dots,n, e \in \{1,2,\dots,k\}\\ &\sigma_j \ge 0\ ,\ j = 1,2,\dots,k, e \in \{1,2,\dots,k\} \end{aligned}$$

که در آن $S_{ij} = \frac{1}{N(h_{ij})} \sum_{\gamma \in h_{ij}} \gamma$ و $d_{ij} = \frac{1}{N(h_{ij})} \sum_{\gamma \in h_{ij}} \sqrt{(\gamma \quad S_{ij})^2}$.

از معادله (۶) مقدارکارایی پوششی π_e بدست می‌آید که می‌توان از آن در تصمیم‌گیری استفاده کرد. بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

(۱) $0 < \pi_e \le 1$.

(۲) اگر $\pi_{e1} > \pi_{e2}$ آنگاه $H_{e2} \quad H_{e1}$ و از منظر کارایی پوششی گزینه e1 از گزینه e2 بهتر است.

(۳) اگر $\pi_e = 1$، آنگاه گزینه مربوطه کارا است.

(۴) اگر $\pi_e < 1$ باشد، آنگاه گزینه مربوطه نسبتاً ناکارا است.

$$A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2); \{\xi_i^2 : \xi_i^2 \in \xi_2(x), \xi_2(x) \in [0,1]\}$$ و

دو عدد GTHF، و l_{A_1} و l_{A_2} بترتیب تعداد مقادیر ξ_i^1 در $\xi_1(x)$ و ξ_i^2 در $\xi_2(x)$ باشد. اگر $l_{A_1} \neq l_{A_2}$، برای تساوی تعداد و مقایسه آن‌ها به کوچکترین مقدار بصورت $\xi_k^1 = \min\{\xi_i^1 : \xi_i^1 \in \xi_1(x)\}$ یا $\xi_k^2 = \min\{\xi_i^2 : \xi_i^2 \in \xi_2(x)\}$ اضافه می‌کنیم.

۲.۳. مروری بر TOPSIS-GTHFN

از آنجا که اعداد فازی مردد تعمیم یافته تعمیمی از مجموعه اعداد فازی مردد و اعداد فازی تعمیم یافته است و اجازه می‌دهد تا درجات عضویت یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی به مجموعه‌ای که بصورت چندین مقدار فازی ممکن نشان داده می شود ارائه شود. در این بخش با استفاده از معیار فاصله‌ای همینگ، استراتژی تصمیم‌گیری چند شاخصه TOPSIS با اعداد GTHF را برای تایید روش پیشنهادی و مقایسه روش‌ها بکار می‌بریم. در این مقاله مجموعه همه اعداد GTHF روی ، Ω در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۳-۱۲: [۸] فرض کنید $A_1, A_2 \in \Omega$ آنگاه اندازه فاصله بین A_1, A_2 بصورت $D_{GTHF}(A_1, A_2)$ تعریف می‌شود که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

1. $0 \le D_{GTHF}(A_1, A_2) \le 1$
2. $D_{GTHF}(A_1, A_2) = 0 \iff A_1 = A_2$
3. $D_{GTHF}(A_1, A_2) = D_{GTHF}(A_2, A_1)$

توجه[۶]. فرض کنید $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1); \{\xi_i^1 : \xi_i^1 \in \xi_1(x), \xi_1(x) \in [0,1]\}$

تعریف۳-۱۳: [۶] فرض کنید $A_1, A_2 \in \Omega$ و $l_h = \max\{l_1, l_2\}$ آنگاه اندازه فاصله همینگ بین A_1, A_2 با نماد $D^H{}_{GTHF}(A_1, A_2)$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر است:

$$D^H{}_{GTHF}(A_1, A_2) = \sum_{i=1}^{l_h} \left| \left(\frac{c_1^2+d_1^2-a_1^2-b_1^2-c_2^2-d_2^2+a_2^2+b_2^2}{8.l_h}\right).(\xi^1_{\sigma(i)} \xi^2_{\sigma(i)}) \right|$$

که $\xi^1_{\sigma(i)}$ و $\xi^2_{\sigma(i)}$ بترتیب بزرگترین مقادیر i در $\xi_1(x)$ و $\xi_2(x)$ است.

۴. DEA پیشنهادی برای حل مسائل تصمیم‌گیری با اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته

فرض کنید $p = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ مجموعه‌ای از گزینه‌ها و $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ مجموعه‌ای از معیارها باشد. اگر $\tilde{\xi}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}); \xi_{ij}(x)$ عناصر فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته باشند، آنگاه

$$[\tilde{\xi}_{ij}]_{m\times n} = \begin{matrix} \tilde{\xi}_{11} & \tilde{\xi}_{12} & \dots & \tilde{\xi}_{1n} \\ \tilde{\xi}_{21} & \tilde{\xi}_{22} & \dots & \tilde{\xi}_{2n} \\ & & & \\ \tilde{\xi}_{m1} & \tilde{\xi}_{m2} & \dots & \tilde{\xi}_{mn} \end{matrix}$$

ماتریس تصمیم‌گیری چند معیاره GTHF نامیده می شود، که از تصمیم تصمیم‌گیرندگان یا خبرگان بدست می-آید. در اینجا $\tilde{\xi}_{ij}$ ارزیابی p_i گزینه را با توجه به معیار c_j تصمیم‌گیری خبرگان نشان می‌دهد. برای ارزیابی p_i گزینه در این بخش روش دو مرحله‌ای ارائه می‌شود، که مدل اولیه شباهت‌هایی با مدل سینونانی استرن[۲۵] و ژو [۳۵] دارد. ساختار مدل پیشنهادی بر مبنای مدل تحلیل پوششی فازی مردد انحراف محور (DHFEA) است و ارزیابی هر کدام از واحدهای تصمیم‌گیرنده براساس مقایسه‌های زوجی سایر واحدهای تصمیم‌گیری انجام می‌پذیرد.

ورودی: اعداد GTHF **خروجی:** رتبه‌بندی گزینه‌ها و انتخاب گزینه بهینه
گام۱. ماتریس تصمیم‌گیری چند معیاره-GTHF، $[\tilde{\xi}_{ij}]_{m\times n}$ را بر اساس [۷] ایجاد کنید. **گام۲.** با در نظر گرفتن $\eta = \max_{i,j}\{a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij}\}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ماتریس $[\tilde{\xi}_{ij}]_{m\times n}$ را بصورت $n_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{\eta}, \frac{b_{ij}}{\eta}, \frac{c_{ij}}{\eta}, \frac{d_{ij}}{\eta}\right); \xi_{ij}(x) \in \Omega$ نرمالیزه کنید. **گام۳.** بردار وزنی $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ را در نظر بگیرید، که $w_j, j = 1, \dots, n$ وزن معیارهای $c_j, j = 1, \dots, n$ است و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. **گام۴.** ماتریس $[\tilde{\xi}_{ij}]_{m\times n}$ را از نظر وزنی بصورت $n_{ij}{}^w = w_j \times n_{ij} = (\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij}, \tilde{c}_{ij}, \tilde{d}_{ij}); \tilde{\xi}_{ij}(x) \in \Omega, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ نرمالیزه و محاسبه کنید. **گام۵.** راه حل ایده‌آل مثبت GTHF، A^+، و راه حل ایده آل منفی GTHF، A^-، را برای $[n_{ij}{}^w]_{m\times n}$ محاسبه کنید، بطوری که $A^+ = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}}{i.j}, \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{ij}}{i.j}, \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij}}{i.j}, \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{d}_{ij}}{i.j}\right); \{\max_{i,j}\{\xi : \xi \in \tilde{\xi}_{ij}(x)\}\}$ و $A^- = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}}{i.j}, \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{ij}}{i.j}, \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij}}{i.j}, \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{d}_{ij}}{i.j}\right); \{\min_{i,j}\{\xi : \xi \in \tilde{\xi}_{ij}(x)\}\}$

گام ۶. اندازه فاصله همینگ $D^{H}{}_{GTHF}(n_{ij}{}^{w}, A^{+})$ و $D^{H}{}_{GTHF}(n_{ij}{}^{w}, A^{-})$ را محاسبه کنید.

گام۷. اندازه فاصله کلی $d_i^{+} = \sum_{j=1}^{n} D^{H}{}_{GTHF}(n_{ij}{}^{w}, A^{+}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ و $d_i^{-} = \sum_{j=1}^{n} D^{H}{}_{GTHF}(n_{ij}{}^{w}, A^{-})$ را برای هر گزینه $p_i, i = 1, \dots, m$ محاسبه کنید.

گام ۸. مقادیر نمره برای هر گزینه را از $s_i = \frac{d_i^{+}}{d_i^{+}+d_i^{-}}, i = 1, \dots, m$ بیابید.

گام ۹. با استفاده از مقدار نمرات s_i ، $i = 1, \dots, m$، رتبه بندی را انجام دهید (اگر $s_k > s_l,\ k, l \in \{1, \dots, m\}$ آنگاه $p_k \quad p_l$).

۱.۴. مرحله اول. مقایسات زوجی به وسیله مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی مردد انحراف محور

فرض کنید مجموعه امکان تولیدی که در نظر می‌گیریم، $T^{A,B}$، بصورت معادله (۸) باشد:

$$T^{A,B} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) | x \geq \sum_{j=1, j\neq A,B}^{n} \lambda_j \tilde{x_j}\ , y \leq \sum_{j=1, j\neq A,B}^{n} \lambda_j \tilde{y}_j\ , \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, j \neq A, B\} \quad (۸)$$

تعریف۴- ۱۴: شاخص ورودی بصورت تابع انحراف (x_{ij}) و شاخص خروجی (y_{ij}) به فرم تابع امتیاز در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\tilde{y}_{ij} = S(\xi_{GTHFN}) = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2.N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} \mu$$

و

$$\tilde{x}_{ij} = D(\xi_{GTHFN}) = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2} \left[\frac{1}{N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} (\mu \quad y_{ij})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

بطوری که μ درجه عضویت های ممکن از ξ_{GTHFN} و $N(h)$ تعداد عناصر موجود در ξ_{GTHFN} است.

مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را با توجه به مجموعه امکان تولید پیشنهادی در معادله (۸) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & E(A, T^{A,B}) = \min\ \theta \\ & s.t. \qquad (۹) \\ & \sum_{j=1, j\neq A,B}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} \quad \theta\, \tilde{x}_{iA} \leq 0\ , i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1, j\neq A,B}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq\ \tilde{y}_{rB}\quad , r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, j \neq A, B, j = 1, \dots, n, \\ & A \epsilon \{1, \dots, n\}, B \epsilon \{1, \dots, n\}, r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

که $\tilde{y}_{ij} = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2.N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} \mu$ و $\tilde{x}_{ij} = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2} [\frac{1}{N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} (\mu \quad y_{ij})^2]^{\frac{1}{2}}$.

در مدل (۹)، $E(A, T^{A,B})$ ارزیابی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده (x_A, y_A) در مجموعه امکان تولید $T^{A,B}$ می‌باشد. بطور مشابه مدل $E(B, T^{A,B})$ نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & E(B, T^{A,B}) = \min\ \theta \\ & s.t. \qquad (۱۰) \\ & \sum_{j=1, j\neq A,B}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} \quad \theta\, \tilde{x}_{iB} \leq 0\ , i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1, j\neq A,B}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq\ \tilde{y}_{rB}\ \ , r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, j \neq A, B, j = 1, \dots, n, \\ & A \epsilon \{1, \dots, n\}, B \epsilon \{1, \dots, n\}, r = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

که $\tilde{y}_{ij} = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2.N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} \mu$ و $\tilde{x}_{ij} = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2} [\frac{1}{N(h)} \sum_{\mu \in \xi_{GTHFN}} (\mu \quad y_{ij})^2]^{\frac{1}{2}}$.

در واقع در مدل‌های (۹) و (۱۰) در هر بار ارزیابی، واحدهای تصمیم‌گیری مورد نظر DMU_A و DMU_B را در مجموعه امکان تولید در نظر نگرفته و مقایسات زوجی و ارزیابی انجام می‌گیرد.

۲.۴. مرحله دوم: رتبه‌بندی

ماتریس مقایسات زوجی حاصل از مدل (۹) و (۱۰) را برای هر DMU_A و DMU_B بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = [a_{A,B}]_{n\times n} \quad (۱۱)$$
$$a_{A,B} = \frac{E(A,T^{A,B})}{E(B,T^{A,B})},\ A,B = 1,2,\dots,n$$

با تقسیم نتیجه حاصل از ارزیابی DMU_A یعنی $E(A,T^{A,B})$ و ارزیابی DMU_B یعنی $E(B,T^{A,B})$، $a_{A,B}$ بدست می‌آید. از [۲۳] رابطه زیر را داریم:

$$a_{A,B} = \frac{1}{a_{B,A}} \quad ,A,B = 1,2,\dots,n \quad (۱۲)$$

بنابراین، بوسیله ارزیابی DMUها تمام زوج مولفه‌های ماتریس مقایسه زوجی بدست می‌آید. پس ما اگر یک ماتریس تصمیم‌گیری چند معیاره با داده‌های فازی ذوزنقه‌ای مردد تعمیم یافته داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از روش پیشنهادی اطلاعات را به داده‌های قطعی تبدیل نموده و براین اساس می‌توانیم بردار وزن نسبی W را محاسبه و با توجه به آن رتبه‌بندی را انجام دهیم.

۳.۴. الگوریتم روش پیشنهادی

اکنون، یک الگوریتم و فلوچارت الگوریتم تصمیم‌گیری تحت محیط GTHF را به صورت زیر ارائه می‌دهیم.
فلوچارت با مراحل الگوریتم پیشنهادی در شکل ۱ ارائه شده است.

ورودی: GTHF-numbers

خروجی: رتبه‌بندی گزینه‌ها و انتخاب گزینه بهینه

---

۱. ماتریس تصمیم‌گیری GTHF، $[\tilde{\xi}_{ij}]_{m\times n}$ را توسط تصمیم‌گیرندگان ایجاد کنید.

۲. اعداد GTHF ($\tilde{\Omega}_{ij} = nw_i\tilde{\xi}_{ij} \quad ,i \in I_m; j \in I_n$) را محاسبه و ماتریس تصمیم‌گیری $[\tilde{\Omega}_{ij}]_{m\times n}$ را بنویسید.

۳. مجموعه امکان تولید متفاوت، $T^{A,B}$، را تشکیل داده و مدل DEA پیشنهادی متناظر با آن را ایجاد کنید.

۴. مقادیر امتیاز و انحراف اعداد GTHF را محاسبه و آن‌ها را بترتیب به عنوان خروجی (**Y**) و ورودی (**X**) مدل پیشنهادی قرار دهید.

۵. مساله (۹) را حل کرده و کارایی $\mathbf{DMU_A}$، که ارزیابی نسبی واحد $(\mathbf{x_A}, \mathbf{y_B}) \in \mathbf{T^{A,B}}$ یعنی $\mathbf{E(A, T^{A,B})}$ را بدست آورید.

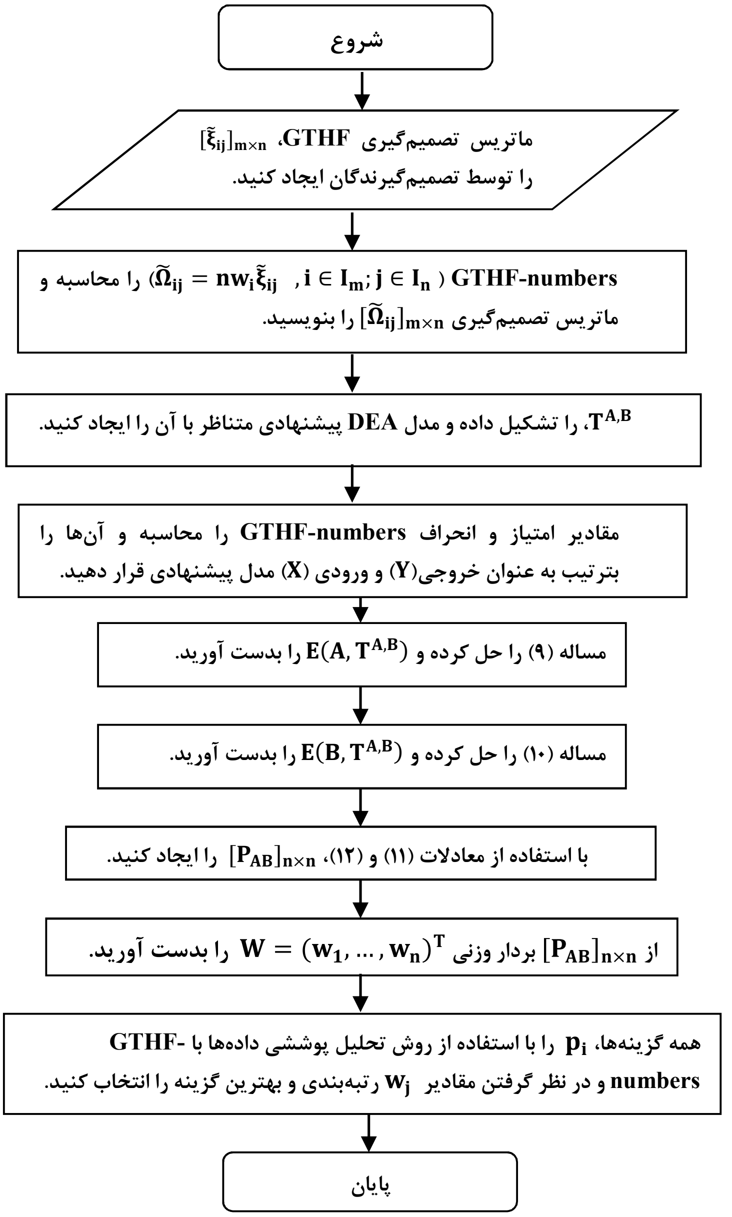
۶. مساله (۱۰) را حل کرده و کارایی $\mathbf{DMU_B}$، که ارزیابی نسبی واحد $(\mathbf{x_A}, \mathbf{y_B}) \in \mathbf{T^{A,B}}$ یعنی $\mathbf{E(B, T^{A,B})}$ را بدست آورید.

۷. با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۲) و نتایج گام‌های ۵ و ۶، ماتریس مقایسه زوجی $[\mathbf{P_{AB}}]_{\mathbf{n\times n}}$ را ایجاد کنید.

۸. از ماتریس تصمیم‌گیری مقایسه زوجی $[\mathbf{P_{AB}}]_{\mathbf{n\times n}}$ بردار وزنی $\mathbf{W = (w_1, \dots, w_n)^T}$ را بدست آورید.

۹. همه گزینه‌ها، $\mathbf{p_i}$ را با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها با اعداد GTHF و در نظر گرفتن مقادیر $\mathbf{w_j}$ ($\mathbf{j = 1, \dots, n}$) رتبه‌بندی و بهترین گزینه را انتخاب کنید.

الگوریتم ۱: روش DEA برای حل مسائل تصمیم گیری با اعداد GTHF



شکل ۱. فلوچارت الگوریتم

۵. مثال کاربردی

در این بخش برای شرح و تایید روش پیشنهادی، یک مثال کاربردی تصمیم‌گیری تحت محیط عدم قطعیت و با اطلاعات فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته با چهار معیار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

شرح مورد: مساله تصمیم‌گیری اتخاذ شده با قضاوت های زبانی از [۹] را در نظر می‌گیریم. یک شرکت سرمایه‌گذاری می‌خواهد مبلغی را در بهترین گزینه سرمایه‌گذاری کند. مجموعه‌ای از چهار گزینه $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ برای سرمایه‌گذاری تعیین می‌شود، بطوری که شرکت سرمایه‌گذاری باید با توجه به چهار معیار مشخص‌شده به شرح زیر تصمیم بگیرد:

جدول۱. مشخصات گزینه‌ها و معیارها

معیارها (C)	گزینه‌ها (P)	
تحلیل ریسک	شرکت خودرو سازی	۱
تحلیل رشد	شرکت مواد غذایی	۲
تحلیل اثرات زیست‌محیطی	شرکت رایانه ای	۳
تحلیل تاثیر سیاسی اجتماعی	شرکت تلویزیونی	۴

چهار گزینه ممکن تحت چهار معیار فوق با توجه به مقادیر زبانی اعداد GTHF، همان گونه که در جدول ۲ نشان‌داده شده‌است ارزیابی می‌شوند. همچنین، بردار وزن معیارها بصورت $w = (0.25,0.20,0.25,0.3)^T$ می‌باشد و برای ارزیابی گزینه p_i، $i = (1,2,3,4)$ با توجه به معیار c_j، $j = (1,2,3,4)$ از پرسشنامه استفاده می‌شود.

جدول ۲. اعداد GTHF برای اصطلاحات و قضاوت های زبانی

اصطلاحات و قضاوت‌های زبانی		مقادیر زبانی GTHF-numbers
کاملا کم	Absolutely low (AL)	$(0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\}$
کم	Low (L)	$(0.2,0.3,0.4,0.5);\{0.2,0.3,0.4\}$
نسبتا کم	Fairly low (FL)	$(0.3,0.4,0.5,0.6);\{0.3,0.4,0.5\}$
متوسط	Medium (M)	$(0.4,0.5,0.6,0.7);\{0.4,0.5,0.6\}$
نسبتا زیاد	Fairly high (FH)	$(0.5,0.6,0.7,0.8);\{0.5,0.6,0.7\}$
زیاد	High (H)	$(0.6,0.7,0.8,0.9);\{0.6,0.7,0.8\}$
کاملا زیاد	Absolutely high (AH)	$(0.7,0.8,0.9,1.0);\{0.7,0.8,0.9\}$

بنابراین تصمیم‌گیرندگان ماتریس تصمیم‌گیری فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته را به صورت $[\tilde{\xi}_{ij}]$ می‌سازند.

$$[\tilde{\xi}_{ij}] =
\begin{matrix}
(0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\} & (0.3,0.4,0.5,0.6);\{0.3,0.4,0.5\} \\
(0.3,0.4,0.5,0.6);\{0.3,0.4,0.5\} & (0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\} \\
(0.2,0.3,0.4,0.5);\{0.2,0.3,0.4\} & (0.5,0.6,0.7,0.8);\{0.5,0.6,0.7\} \\
(0.6,0.7,0.8,0.9);\{0.6,0.7,0.8\} & (0.2,0.3,0.4,0.5);\{0.2,0.3,0.4\} \\
(0.6,0.7,0.8,0.9);\{0.6,0.7,0.8\} & (0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\} \\
(0.4,0.5,0.6,0.7);\{0.4,0.5,0.6\} & (0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\} \\
(0.7,0.8,0.9,1.0);\{0.7,0.8,0.9\} & (0.2,0.3,0.4,0.5);\{0.2,0.3,0.4\} \\
(0.2,0.3,0.4,0.5);\{0.2,0.3,0.4\} & (0.2,0.3,0.4,0.5);\{0.2,0.3,0.4\}
\end{matrix}$$

$\tilde{\Omega}_{ij} = nw_i\tilde{\xi}_{ij} \quad ,i \in I_m; j \in I_n$ [۹] را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$\tilde{\Omega}_{11} = 4 \times 0.25 \times (0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\} = (0.1,0.2,0.3,0.4);\{0.1,0.2,0.3\} = (0.100,0.200,0.300,0.400);\{0.1,0.2,0.3\}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_{12} &= 4 \times 0.2 \times (0.3,0.4,0.5,0.6);\{0.3,0.4,0.5\} \\
&= (0.3^{0.8},0.4^{0.8},0.5^{0.8},0.6^{0.8});\{0.3,0.4,0.5\} \\
&= (0.382,0.480,0.574,0.665);\{0.3,0.4,0.5\}
\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب می‌توانیم سایر GTHF-number ها را با توجه به ماتریس تصمیم‌گیری $[\tilde{\xi}_{ij}]$ بدست آوریم.

$$[\tilde{\Omega}_{ij}] = \begin{pmatrix}
(0.100,0.200,0.300,0.400);\{0.1,0.2,0.3\} \\
(0.300,0.400,0.500,0.600);\{0.3,0.4,0.5\} \\
(0.200,0.300,0.400,0.500);\{0.2,0.3,0.4\} \\
(0.600,0.700,0.800,0.900);\{0.6,0.7,0.8\}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}
(0.382,0.480,0.574,0.665);\{0.3,0.4,0.5\} \\
(0.158,0.276,0.382,0.480);\{0.1,0.2,0.3\} \\
(0.574,0.665,0.752,0.837);\{0.5,0.6,0.7\} \\
(0.276,0.382,0.480,0.574);\{0.2,0.3,0.4\} \\
(0.600,0.700,0.800,0.900);\{0.6,0.7,0.8\} \\
(0.400,0.500,0.600,0.700);\{0.4,0.5,0.6\} \\
(0.700,0.800,0.900,1.000);\{0.7,0.8,0.9\} \\
(0.200,0.300,0.400,0.500);\{0.2,0.3,0.4\}
\end{matrix}$$

$(0.063,0.145,0.236,0.333); \{0.1,0.2,0.3\}$
$(0.063,0.145,0.236,0.333); \{0.1,0.2,0.3\}$
$(0.145,0.236,0.333,0.435); \{0.2,0.3,0.4\}$
$(0.145,0.236,0.333,0.435); \{0.2,0.3,0.4\}$

سپس با استفاده از معادله تابع امتیاز در تعریف ۲-۹، $S(\widetilde{\Omega}_{GTHFN})$، p_j (j=1,2,3,4) گزینه با چهار معیار c_i (i=1,2,3,4) بصورت زیر است:

$S(\widetilde{\Omega}_{11}) = 0.020 \quad S(\widetilde{\Omega}_{12}) = 0.079 \quad S(\widetilde{\Omega}_{13}) = 0.210 \quad S(\widetilde{\Omega}_{14}) = 0.014$
$S(\widetilde{\Omega}_{21}) = 0.072 \quad S(\widetilde{\Omega}_{22}) = 0.028 \quad S(\widetilde{\Omega}_{23}) = 0.073 \quad S(\widetilde{\Omega}_{24}) = 0.024$
$S(\widetilde{\Omega}_{31}) = 0.042 \quad S(\widetilde{\Omega}_{32}) = 0.148 \quad S(\widetilde{\Omega}_{33}) = 0.113 \quad S(\widetilde{\Omega}_{34}) = 0.037$
$S(\widetilde{\Omega}_{41}) = 0.210 \quad S(\widetilde{\Omega}_{42}) = 0.051 \quad S(\widetilde{\Omega}_{43}) = 0.042 \quad S(\widetilde{\Omega}_{44}) = 0.034$

سپس با استفاده از معادله تابع انحراف در تعریف ۲-۹، $D(\widetilde{\Omega}_{GTHFN})$، p_j (j=1,2,3,4) گزینه با چهار معیار c_i (i=1,2,3,4) بصورت زیر است:

$D(\widetilde{\Omega}_{11}) = 0.051, \quad D(\widetilde{\Omega}_{12}) = 0.110,$
$D(\widetilde{\Omega}_{13}) = 0.255, \quad D(\widetilde{\Omega}_{14}) = 0.023,$
$D(\widetilde{\Omega}_{21}) = 0.112, \quad D(\widetilde{\Omega}_{22}) = 0.041,$
$D(\widetilde{\Omega}_{23}) = 0.163, \quad D(\widetilde{\Omega}_{24}) = 0.022,$
$D(\widetilde{\Omega}_{31}) = 0.081, \quad D(\widetilde{\Omega}_{32}) = 0.193,$
$D(\widetilde{\Omega}_{33}) = 0.405, \quad D(\widetilde{\Omega}_{34}) = 0.051,$
$D(\widetilde{\Omega}_{41}) = 0.246, \quad D(\widetilde{\Omega}_{42}) = 0.073,$
$D(\widetilde{\Omega}_{43}) = 0.063, \quad D(\widetilde{\Omega}_{44}) = 0.051$

بنابراین، با استفاده از تابع انحراف و تابع امتیاز، مقادیر انحراف و امتیاز این چهار شرکت را محاسبه می‌کنیم که به‌ترتیب در جدول (۳) و (۴) نشان داده شده است.

بنابراین، با توجه به مدل پیشنهادی، مساله برنامه ریزی خطی برای ارزیابی DMU_{p_1} در مجموعه امکان تولید T^{p_1,p_2} بصورت مدل (۱۳) است.

$$
\begin{aligned}
& E(p_1, T^{p_1,p_2}) = \min\ \theta \\
& s.t. \qquad\qquad\qquad\qquad (۱۳) \\
& 0.225\lambda_{p_3} + 0.023\lambda_{p_4} \quad 0.031\theta \le 0 \\
& 0.163\lambda_{p_3} + 0.022\lambda_{p_4} \quad 0.102\theta \le 0 \\
& 0.405\lambda_{p_3} + 0.051\lambda_{p_4} \quad 0.063\theta \le 0 \\
& 0.063\lambda_{p_3} + 0.051\lambda_{p_4} \quad 0.255\theta \le 0 \\
& 0.210\lambda_{p_3} + 0.014\lambda_{p_4} \ge 0.079 \\
& 0.073\lambda_{p_3} + 0.024\lambda_{p_4} \ge 0.028 \\
& 0.113\lambda_{p_3} + 0.037\lambda_{p_4} \ge 0.148 \\
& 0.042\lambda_{p_3} + 0.034\lambda_{p_4} \ge 0.051 \\
& \lambda_{p_3}, \lambda_{p_4} \ge 0
\end{aligned}
$$

جدول۳. مقادیر انحراف ماتریس مثال کاربردی

	p_1	p_2	p_3	p_4
c_1	0.031	0.110	0.255	0.023
c_2	0.102	0.041	0.163	0.022
c_3	0.063	0.193	0.405	0.051
c_4	0.255	0.073	0.063	0.051

جدول۴. مقادیر امتیاز ماتریس مثال کاربردی

	p_1	p_2	p_3	p_4
c_1	0.020	0.079	0.210	0.014
c_2	0.072	0.028	0.073	0.024
c_3	0.042	0.148	0.113	0.037
c_4	0.210	0.051	0.042	0.034

و مساله برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی DMU_{p_2} در مجموعه امکان تولید T^{p_1,p_2} بصورت مدل (۱۴) است:

$$E(p_2, T^{p_1,p_2}) = \min\ \theta$$
$$s.t. \qquad (۱۴)$$
$$0.225\lambda_{p_3} + 0.023\lambda_{p_4} \quad 0.110\theta \leq 0$$
$$0.163\lambda_{p_3} + 0.022\lambda_{p_4} \quad 0.041\theta \leq 0$$
$$0.405\lambda_{p_3} + 0.051\lambda_{p_4} \quad 0.193\theta \leq 0$$
$$0.063\lambda_{p_3} + 0.051\lambda_{p_4} \quad 0.073\theta \leq 0$$
$$0.210\lambda_{p_3} + 0.014\lambda_{p_4} \geq 0.020$$
$$0.073\lambda_{p_3} + 0.024\lambda_{p_4} \geq 0.072$$
$$0.113\lambda_{p_3} + 0.037\lambda_{p_4} \geq 0.042$$
$$0.042\lambda_{p_3} + 0.034\lambda_{p_4} \geq 0.210$$
$$\lambda_{p_3}, \lambda_{p_4} \geq 0$$

این نشان می دهد کارایی DMU_{p_1} به DMU_{p_2} برابر است با $a_{p_2,p_1} = 1.1953$. از این رو، با مقایسه سایر جفت واحدهای تصمیم‌گیرنده، ماتریس مقایسه زوجی متناظر آن تشکیل می‌شود.
بنابراین داریم:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.9455 & 1.6234 & 3.6987 \\ 0.5140 & 1 & 0.3245 & 1.7904 \\ 0.6160 & 3.0812 & 1 & 1.9744 \\ 0.2704 & 0.5585 & 0.5065 & 1 \end{bmatrix}$$

از ماتریس فوق بردار وزن نسبی، $W = (0.4047, 0.1703, 0.3118, 0.1149)^T$ را بدست می‌آوریم. نتایج رتبه بندی در جدول (۵) ارائه و با روش‌های AP، TOPSIS-GTHF و روش تجمع هندسی ار در [۹] مقایسه می‌شود.
جواب‌های بهینه از حل دو مدل (۱۳) و (۱۴)، $E(p_2, T^{p_1,p_2}) = 2.57$ و $E(p_1, 5T^{p_1,p_2}) = 2.15$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_{p_1,p_2} = \frac{E(p_1, T^{p_1,p_2})}{E(p_2, T^{p_1,p_2})} = 0.8366$$

می‌توانیم همه شرکت‌ها را رتبه‌بندی کنیم و سپس با استفاده از جدول (۵)، هر چهار شرکت کارا هستند. بنابراین، این شرکت‌ها می‌توانند برای سرمایه گذاری انتخاب شوند در حالی که می‌بایست تنها یک شرکت را به‌عنوان مناسب‌ترین گزینه انتخاب کرد. نتایج روش پیشنهادی نشان می‌دهد که شرکت p_1 گزینه بهینه است. با توجه به بردار وزنی تعیین‌شده توسط روش پیشنهادی، ما می‌توانیم DMUها را اولویت‌بندی کرده و نتایج بدست‌آمده از روش‌های رتبه‌بندی را مقایسه کنیم. به‌طور کلی، ما عملگرهای تجمع و قوانین مقایسه مذکور بهترین آن‌ها را انتخاب کنیم $p_4 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_1$ [۹]. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ستون اول جدول (۵) کارایی CCR واحدها را نشان می‌دهد؛ که در آن تمام واحد ها دارای امتیاز کارایی برابر با ۱ هستند، بنابراین کارا هستند. ستون‌های دیگر، نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های رتبه‌بندی AP، TOPSIS-GTHF، روش در [۹] و روش پیشنهادی ما را گزارش می‌دهند. از ستون دوم جدول فوق مشاهده می‌کنید شرکت‌ها امتیاز ابر کارایی مجاز برای رتبه‌بندی را دریافت نموده‌اند و بنابراین، آن‌ها توسط روش AP نیز رتبه‌بندی شده‌اند.

جدول۵. نتایج و مقایسه رتبه‌بندی روش جدید با AP، روش [۷] و TOPSIS-GTH

	θ_{CCR}	AP	TOPSIS-GTHF	W–رتبه‌بندی به وسیله روش [۷]	w
p_1	1.0000	3.7827(2)	0.493979(1)	0.085(1)	0.4047(1)
p_2	1.0000	2.5137(3)	0.571532(3)	0.063(3)	0.1703(3)
p_3	1.0000	1.6640(4)	0.511878(2)	0.071(2)	0.3118(2)
p_4	1.0000	3.9291(1)	0.799573(4)	0.031(4)	0.1149(4)

با این حال، تمام شرکت‌ها توسط بردار وزنی تعیین‌شده توسط TOPSIS-GTHF، روش تجمع هندسی وزن‌دار در [۹] و روش پیشنهادی رتبه‌بندی می‌شوند. با روش پیشنهادی، شرکت p_1 به‌عنوان شرکت بهینه انتخاب می‌شود. شرکت کارای p_3 جایگاه دوم را به دست می‌آورد. اگر اختلال در عملکرد واحدها یا رویدادهای دیگر رخ دهد که قابل انتخاب نباشند، آنگاه شرکت‌های p_2 و p_4 بترتیب می‌توانند مکان‌های سوم و چهارم رتبه‌بندی را بدست آورند. به‌طورکلی، شرکت‌ها در این مقاله بصورت p_4 p_2 p_3 p_1 رتبه‌بندی می‌شوند.

۱.۵. تحلیل مقایسه‌ای بیشتر

برای نشان دادن مزایای روش پیشنهادی، این بخش روش پیشنهادی را با AP، TOPSIS-GTHF و روش تجمع هندسی وزن‌دار در[۹] بیشتر مقایسه می‌کند. نتایج مقایسه دقیق در جدول (۵) توضیح داده شده‌است.

(۱) در مقایسه با روش‌های ابرکارایی مانند AP، روش پیشنهادی قادر به رتبه‌بندی همه واحدها است زیرا آن‌ها تنها می‌توانند واحدهای کارا را رتبه‌بندی کنند. این در حالی است که روش پیشنهادی با بدست آوردن بردار وزن قادر به حل مساله رتبه‌بندی است. اگر چه روش -TOPSIS GTHF و روش [۹] نیز می‌توانند مشکلات رتبه‌بندی را با در نظر گرفتن معیارهای ذهنی و استفاده از اندازه فاصله و عملگرهای تجمع حل کنند، اما محاسبات زیاد و پیچیده ملزم به صرف زمان زیادی است، همچنین معیارهای ذهنی گاهی ممکن است باعث از دست دادن یا تحریف اطلاعات نیز شود. روش پیشنهادی با مسایل تصمیم‌گیری از طریق متغیرهای ذهنی سر و کار دارد که می‌تواند به طور موثر بر این کاستی غلبه کند.

(۲) روش پیشنهادی کارایی واحدها را با مدل اساسی DEA دو مرحله‌ای تعیین کرده و بردار وزن را محاسبه می‌کند، که می‌تواند از تصادفی و ذهنی بودن جلوگیری کند. از سوی دیگر، روش پیشنهادی نه تنها تعاملات بین معیارها را در نظر می‌گیرد، بلکه روابط اولویت‌بندی سازگار را نیز ایجاد می‌کند در نتیجه نتایج نهایی منطقی تر و محتاط تر هستند.

۶. نتیجه‌گیری

در زندگی واقعی، ما با موقعیت‌های زیادی مواجه می‌شویم که باید با عدد فازی ذوزنقه‌ای مدل‌سازی شود. به عنوان مثال، در بررسی آماری گزارش هواشناسی می‌بینیم که فواصلی برای مقادیر نرمال وجود دارد. وقتی مقادیر به‌دست‌آمده در گزارش از محدوده نرمال خارج می‌شوند، شاهد اثرات منفی بر زندگی انسان می‌باشیم. برای مدل‌سازی چنین حالتی، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای ابزار مفیدی است. اما برای مدل‌سازی نتایج گزارش هواشناسی در زمان‌های مختلف، اعداد فازی ذوزنقه‌ای کافی نیستند. برای غلبه بر این مشکل، مفهوم اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای ابزار مفیدی است. عدد فازی مردد ذوزنقه‌ای، مجموعه‌ای از اعداد فازی ذوزنقه‌ای است. بنابراین، عناصر عدد فازی مردد ذوزنقه‌ای باید نرمال باشند. این یک محدودیت برای اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای است. مفهوم اعداد GTHF عاری از این محدودیت است. بنابراین، این مقاله به مفهوم جدیدی به نام اعداد فازی مردد ذونقه‌ای تعمیم یافته و ترکیب آن با تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازد. با استفاده از این اطلاعات مقادیر امتیاز و انحراف ماتریس تصمیم‌گیری فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته را محاسبه و مدل پیشنهادی را از دیدگاه انحراف و بر اساس مدل استاندارد DEA ایجاد کردیم، سپس از نتایج حاصل جهت ساخت

ماتریس مقایسه زوجی استفاده کردیم و در نهایت واحد های تصمیم گیرنده را اولویت‌بندی نمودیم. بطور کلی بسیاری از روش‌های تصمیم‌گیری تمایل به تمرکز بر روی داده‌های کمی را دارند تا تصمیم‌گیری را دقیق‌تر سازند، اما گاهی ممکن است اطلاعات کمی مناسب و کافی وجود نداشته باشد یا زمان برای جمع‌آوری اطلاعات کمی کافی نباشد. اینجا رویکرد پیشنهادی می‌تواند معرفی شود تا برای جمع‌آوری اطلاعات و داده‌های اولیه توسط کارشناسان و تصمیم‌گیرندگان انعطاف‌پذیرتر باشد، از طرفی فرآیند ارزیابی و اولویت‌بندی نهایی در مدل پیشنهادی براساس قضاوت‌های ذهنی تصمیم گیرنده نیست و نتایج رتبه‌بندی براساس محاسبات ریاضی بدست می‌آید و فرآیند تصمیم‌گیری را دقیق‌تر و اعتماد به تصمیم‌گیری را بیشتر می‌سازد. بنابراین، روش پیشنهادی می‌تواند در مسائل مشابه در زندگی واقعی اعمال شود. برای تحقیقات آتی محققان، حل مسائل تصمیم‌گیری با استفاده از روش‌های VIKOR، Electere و ... براساس عملیات‌ها و عملگرهای اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته می‌تواند مفید باشد، همچنین استفاده از مدل‌های توسعه یافته DEA و بکارگیری عملگرهای تجمع اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد.

فهرست منابع

[1] Alcantud, J.C.R., Santos-García, G., Peng X and Zhan J. (2019). Dual extended hesitant fuzzy sets. Symmetry, 11, 714-727.

[2] Alirezaee, M. R., Sani, M.R. (2011). New analytical hierarchical process/data envelopment analysis ethodology for ranking decision-making units. International Transactions in Operational Research, 18, 533–544.

[3] Amin, F., Fahmi, A. (2019). Human immunodeficiency virus (HIV) infection model based on triangular neutrosophic cubic hesitant fuzzy number. International Journal of Biomathematics, 12, 1950055-1950088.

[4] Atanassov, K.T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy sets & Systems, 20, 87-96.

[5] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E.L. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429–444.

[6] Chen, N., Xu, ZS., Xia, M.M. (2013). Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis. Appl Math Model, 37, 2197–2211.

[7] Cheng-Kai, H., Fung-Bao, L., Cheng-Feng, H. (2017). A Hybrid Fuzzy DEA/AHP Methodology for Ranking Units in a Fuzzy Environments. Symmetry, 9, 273-284.

[8] Deli, I. (2020). A TOPSIS method by using generalized trapezoidal hesitant fuzzy numbers and application to a robot selection problem. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 38, 779-793.

[9] Deli, I., Karaaslan, F., (2020). Generalized trapezoidal hesitant fuzzy numbers and their applications to multiple criteria decision making problems. Soft Computing, https://doi.org/10.1007/s00500-020-05201-2.

[10] Dubois, D., Prade, H. (1983). Ranking fuzzy number in the setting of possibility theory. Inf Sci, 30,183–224.

[11] Hatami-Marbini, A., Agrell, P.J., Tavana, M., Khoshnevis, P., (2017). A flexible cross-efficiency fuzzy data envelopment analysis model for sustainable sourcing. Journal of Cleaner Production, 142, 2761-2779.

[12] Hosseinzadeh Lotfi, F., Ebrahimnejad, Ali., Vaez Ghasemi, M., Moghaddas, Z., (2020). Introduction to data envelopment analysis and fuzzy sets. Data Envelopment Analysis with R, doi: 10.1007/978-3-030-24277-0_1.

[13] Kaufmann A., Gupta M. M. (1988), Fuzzy mathematical models in engineering and anagement science. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

[14] Lertworasirikul, S., Fang, S.C., Joines, J.A., Nuttle, H.L. W. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach. Fuzzy Sets & System, 139, 379-394.

[15] Liao, HC., Xu, ZS., (2014). Some new hybrid weighted aggregation operators under hesitant fuzzy multi criteria decision making environment. Journal of Intelligent & Fuzzy System, 26,1601–1617.

[16] Liao, HC., Xu, ZS. (2014). Subtraction and division operations over hesitant fuzzy sets. Journal of Intelligent & Fuzzy System, 27, 65–72.

[17] Pathinathan, T., Johnson, S.S. (2015). Trapezoidal hesitant fuzzy multi attribute decision making based on TOPSIS. Int Arch Appl Sci Technol, 6, 39–49.

[18] Peng, J.J.,Wang, J.Q.,Wang, J., Yang, L.J., Chen, X.H. (2015). An extension of ELECTRE to multi criteria decision-making problems with multi hesitant fuzzy sets. Inf Sci, 307, 113–126.

[19] Qian, G., Wang, H., & Feng, X. (2013). Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system. Knowledge-based systems, 37, 357-365.

[20] Rakhshan, S.A., Kamyad, A.V., Effati, S (2015). Ranking decision-making units by using combination of analytical hierarchical process method and Tchebycheff model in data envelopment analysis. Annals of Operations Research, 226, 505–525.

[21] Rodriguez, R.M., Martinea, L., Torra, V., Herrera, F. (2012). Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 20, 109-119.

[22] Rong, Y., Pei, Z., & Liu, Y. (2020). Hesitant fuzzy linguistic hamy mean aggregation operators and their application to linguistic multiple attribute decision-making. Mathematical problems in engineering, DOI:10.1155/2020/ 3262618.

[23] Saaty, T.L. (1980). The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill.

[24] Shang, J., Sueyoshi, T (1995). A unified framework for the selection of a flexible manufacturing system. European Journal of Operational Research, 85, 297–315.

[25] Sinuany-Stern, Z., Mehrez, A., Hadad, Y. (2000). An AHP/DEA methodology for ranking decision-making units. International Transactions in Operation Research, 7, 109-124.

[26] Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. International Journal of Intelligent Systems, 25, 529-539.

[27] Torra, V., Narukawa, Y. (2009). On hesitant fuzzy sets and decision. In: The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Jeju Island, Korea, 1378-1382.

[28] Umamaheswari, A., Kumari, P. (2014). Fuzzy topsis and fuzzy VIKOR methods using the triangular fuzzy hesitant sets. International Journal of Computer Science Engineering and Information Technology Research, 4, 15–24.

[29] Wang, J. Q., Wu, J. T., Wang, J., Zhang, H. Y., Chen, X. H. (2014). Interval valued hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multi criteria decision-making problems. Information Sciences, 288, 55–72.

[30] Xia, M.M., Xu, Z. S. (2011). Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. Journal of Approximate Reasoning, 52, 395–407

[31] Ye, J. (2013). Multicriteria decision making method using expected values in trapezoidal hesitant fuzzy setting. Journal of Convergence Information Technology, 8, 135-143.

[32] Yu, D. (2013). Triangular hesitant fuzzy set and its application to teaching quality evaluation. Journal of Information and Computational Science, 10, 1925-1934.

[33] Yu, D., Zhang, J., Huang, G. (2016). Dual hesitant fuzzy aggregation operators. Technological and Economic Development of Economy, 22, 194-209.

[34] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. Information and Contorol, 8, 38-353.

[35] Zhou, W., Chen, J., Xu, Z., Meng, S. (2018). Hesitant fuzzy preference envelopment analysis and alternative improvement. Information Science, 465, 105-117.

[36] Zhao, H., Yao, R., Xu, L., Yuan, Y., Li, G., Deng, W. (2018). Study on a novel fault damage degree identification method using high order differential mathematical morphology gradient spectrum entropy. Entropy, 20, 682-700.