

مدل سازی جریان در محیط متخلخل با استفاده از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید

کریم گودرزی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

بهار فیروزآبادی (دانشیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار جریان دوفازی در محیط متخلخل با استفاده از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید پیاده سازی و حل شده است. با استفاده از تعریف فشار و سرعت کلی، معادلات جریان در محیط متخلخل به فرم ساده تری از لحاظ عددی تبدیل شده است. در این معادلات، معادله فشار و درجهی اشباع نسبت به هم وابستگی کمی دارند ولی سرعت در معادله درجهی اشباع مستقیماً ظاهر می شود. به همین دلیل برای رسیدن به جواب های قابل قبول باید سرعت با دقت خوبی محاسبه شود. روش هیبرید معادلات سرعت و فشار را با هم و به طور هم زمان حل می کند و از خطاهای ناشی از مشتق گیری عددی از میدان فشار برای رسیدن به میدان سرعت اجتناب می کند. بدین ترتیب میدان سرعت و فشار دقت یکسانی دارند. معادله درجهی اشباع نیز از یک روش هیبریدی گسسته می شود. در این نوشتار میدان های یک بعدی و دوبعدی با استفاده از روش مذکور حل شده است. نتایج نشان داده است که جواب های به دست آمده از این روش، خصوصاً در شبکه درشت، نسبت به روش های دیگر از جمله روش های اختلاف محدود و اجزاء محدود گارکین به حل دقیق نزدیک تر است.

واژگان کلیدی: محیط متخلخل، اجزاء محدود ترکیبی هیبرید، جریان دوفازی.

مقدمه

کنترل بالادستی^۱ ارائه شده اند، اگرچه در این روش ها نیز اتلاف عددی زیاد بوده و در نقاط ناپیوستگی دارای جواب های خوبی نیستند. در این روش ها ابتدا معادله فشار را حل، و سپس با مشتق گرفتن از میدان فشار میدان سرعت را به دست می آورند -- مشتق عددی خود باعث به وجود آمدن خطاهای عددی زیادی می شود. بنابر این میدان سرعتی که از این روش به دست می آید دارای دقت قابل قبولی نخواهد بود. برای رفع این مشکل، روش اجزاء محدود ترکیبی^۲ ارائه شد.^[۱] در روش اجزاء محدود ترکیبی میدان سرعت و فشار هم زمان حل می شود و میدان سرعتی که از این روش به دست می آید برای نفوذ پذیری های همگن و ناهمگن دقت مناسبی دارد. دورلفسکی روش اجزاء محدود ترکیبی و حجم محدود را برای جریان تک فاز در محیط ناهمگن با هم مقایسه کرد و به این نتیجه رسید که خطوط جریانی که از روش اجزاء محدود ترکیبی به دست می آید بسیار دقیق تر از روش حجم محدود است.^[۲] اما گسسته سازی معادلات به روش اجزاء محدود ترکیبی به دستگاهی از نوع مسائل زینی^۴ منجر می شود که حل آن با استفاده از روش های استاندارد امکان پذیر نیست.^[۱] برای از بین بردن این مشکل مسعود و هیوز روشی ارائه کردند که در آن تابع وزنی و شکلی فشار و سرعت یکسان است.^[۳] این روش، دستگاه معادلات ضعیف را به دستگاه پایدار تبدیل می کند. روش دیگر استفاده از روش هیبرید است که توسط شاونت ارائه شد.^[۱] به وسیله این روش دستگاهی خوش رفتار نتیجه می شود که می توان آن را به راحتی با استفاده از روش های استاندارد حل کرد. نتایج به دست آمده

شناخت جریان در محیط متخلخل برای مهندسين اهميت زيادي دارد. از جمله روش هایی که برای این کار پیشنهاد می شود، روش های آزمایشگاهی و شبیه سازی عددی است. از آنجا که روش های آزمایشگاهی هزینه بر هستند، عمده ی رویکردها استفاده از روش های عددی است. شبیه سازی جریان در محیط متخلخل مشکلات خاصی دارد. در این محیط از معادله ی دارسی برای بیان حرکت سیال استفاده می شود. در این معادله ضریب نفوذ پذیری نسبی تابعی از درجه ی اشباع سیال است که این خود باعث غیرخطی شدن معادلات می شود. همچنین معادلات در محیط متخلخل از نوع معادلات جابه جایی - پخشی بوده که جمله ی جابه جایی آن قوی تر است و این امر باعث افزایش اتلاف عددی^۱ معادلات می شود؛ همچنین معادلات به شکل هذلولی بوده که جواب آن ها همراه با ناپیوستگی است. از طرف دیگر در بیشتر مسائل واقعی، محیط متخلخل محیطی ناهمگن است و این امر باعث تغییرات شدید مکانی می شود. روش هایی از نوع اجزاء محدود کلاسیک، هنگامی که محیط همگن باشد، جواب های نسبتاً خوبی ارائه می کنند. اما با وجود ناهمگنی در محیط، به طور مثال ناهمگنی در تخلخل یا نفوذ پذیری، این روش ها نمی توانند ناپیوستگی ها را به خوبی مدل کرده و به این ترتیب جواب هایی که از این روش ها به دست می آیند دقت خوبی نخواهند داشت. برای غلبه بر این مشکل، روش هایی به شکل حجم

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۷/۷، داوری ۱۳۸۶/۱۲/۷، پذیرش ۱۳۸۸/۵/۳.

که در آن φ ضریب تخلخل، q چشمه یا چاه و ρ چگالی است. وقتی از واژه امتزاج ناپذیر استفاده می شود منظور این است که هیچ انتقال جرمی بین دو فاز وجود ندارد. به سادگی می توان نشان داد که قانون بقای جرم، برای هر فاز در محیط متخلخل مطابق رابطه ی ۲ قابل بیان است: [۶]

$$\frac{\partial(\varphi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = q_{\alpha} \quad \alpha = w, n, \quad (2)$$

که در آن w علامت فاز ترکنده، n علامت فاز غیر ترکنده، S_{α} درجه اشباع هر فاز و u_{α} سرعت همان فاز است.

قانون داریسی

داریسی رابطه ی بین نرخ جریان و عامل به وجود آورنده ی آن را در سال ۱۸۵۶ ارائه کرد که به «قانون داریسی» مشهور است. [۷] با در نظر گرفتن اثرات گرانش، قانون داریسی در حالت کلی (یک، دو، یا سه بعدی) برای سیال تک فاز چنین است: [۸]

$$\vec{u} = \frac{-k}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla D) \quad (3)$$

که در آن ∇P تغییرات فشار، μ لزجت سیال، k نفوذپذیری ماده ی متخلخل، g شتاب گرانش و D معرف عمق (تابع دلخواهی از سیستم مختصات) است. در حالتی که بیش از یک فاز در محیط حضور داشته باشد، با اندک اصلاحی می توان از قانون تعمیم یافته ی داریسی استفاده کرد: [۶]

$$\vec{u}_{\alpha} = \frac{-k k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} (\nabla P_{\alpha} - \rho_{\alpha} g \nabla D) \quad (4)$$

که در آن $k_{r\alpha}$ نفوذپذیری نسبی برای فاز α بوده و تابعی از درجه اشباع این فاز در نقطه ی مورد نظر S_{α} است.

برای هر فاز در محیط متخلخل معادله ی ۳ و ۴ برقرار است. هدف در این نوشتار، حل جریان دوفازی غیر قابل امتزاج و تراکم ناپذیر است. معادله ی ۲ برای دو فاز w و n مطابق رابطه ی ۵ بازنویسی می شود: [۶]

$$\frac{\partial(\varphi \rho_n S_n)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{-k k_{rn}}{\mu_n} (\nabla P_n - \rho_n g \nabla D) \right) = q_n \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\varphi \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{-k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \rho_w g \nabla D) \right) = q_w \quad (6)$$

با حل دو معادله ی ۵ و ۶ یک جریان دوفاز در محیط متخلخل به طور کامل مشخص می شود. مجهولات مسئله عبارت اند از: S_n, S_w, P_n, P_w . بدین ترتیب برای حل معادلات فوق باید دو معادله ی کمکی به دست آورد. برای درجه اشباع ها می توان نوشت:

$$S_w + S_n = 1 \quad (7)$$

از طرفی فشار موینگی P_c را می توان طبق رابطه ی ۸ بیان کرد:

$$P_n - P_w = P_c \quad (8)$$

در متون فنی روابطی برای فشار موینگی برحسب درجه اشباع ارائه شده است. با استفاده از این روابط می توان دستگاه معادلات را کامل کرد. بدین ترتیب با توجه به معادلات کمکی، به صورت دستگاه معادلات (۵ - ۸) بسته می شود و به دستگاه معادلاتی با چهار معادله و چهار مجهول تبدیل می شود.

از این روش با روش اجزاء محدود کلاسیک برای هندسه های کاملاً ناهمگن مقایسه و نشان داده شد که خطوط جریانی که از روش هیبرید به دست آمده بسیار دقیق تر از روش اجزاء محدود کلاسیک است. [۴] روش اجزاء محدود ترکیبی اولین بار توسط شاونت و همکاران برای جریان دوفاز در محیط متخلخل مورد مطالعه قرار گرفت. [۵] پس از آن بود که شاونت روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید^۵ را ارائه کرد. [۱]

معادلات حاکم بر جریان چندفازی در محیط متخلخل مشتمل است بر قانون داریسی تعمیم یافته، قانون بقای جرم برای هریک از فازها، و دو رابطه نیز برای فشار موینگی و نفوذپذیری نسبی. این معادلات شدیداً به یکدیگر وابسته اند و حل آن ها با روش های عددی مرسوم مشکل است، و لذا آن ها را با تبدیلات خاصی به معادلاتی با وابستگی کم تر و همچنین فرم ریاضی قابل قبول تر تبدیل می کنند. لازم به ذکر است که معادلاتی که به این روش به وجود می آید معادلات گذرا و میانی بوده و فعلاً معنای خاص فیزیکی برای آن ها پیدا نشده است. یکی از این گروه معادلات با استفاده از تعریف فشار کلی به دست می آید. در این فرم، معادله ی درجه اشباع به وسیله ی سرعت به معادله ی فشار ربط پیدا می کند، ولی فشار مستقیماً در معادله ی درجه اشباع ظاهر نمی شود. همچنین در این معادله سرعت به صورت صریح نمایان است و بدین ترتیب معادله ی درجه اشباع شدیداً به سرعت وابسته است؛ لذا محاسبه ی دقیق میدان سرعت در یافتن جواب مسئله از اهمیت به سزایی برخوردار است. بدین ترتیب باید به دنبال روشی بود که میدان سرعت و فشار را به صورت هم زمان حل، و بقای موضعی و کلی را حفظ کند. از طرف دیگر معادله ی درجه اشباع یک معادله ی گذرای جابه جایی - بخشی است که در اغلب مسائل از جمله جابه جایی غالب است. دقت حل این معادله نیز در حل زمانی اهمیت زیادی دارد.

در این نوشتار از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید برای حل معادلات جریان دو فاز در محیط متخلخل استفاده شده است. در معادله ی فشار به جای درجه اشباع از درجه اشباع زمان قبل استفاده می شود. بدین ترتیب معادله ی فشار به صورت ضمنی و درجه اشباع به صورت صریح حل می شود. به دلیل این که فشار براثر تغییر درجه اشباع تغییرات ناچیزی دارد، حل معادله ی فشار به صورت ضمنی توجیه پذیر می شود. به این ترتیب ابتدا معادله ی داریسی حل می شود و سپس با به دست آوردن مقدار فشار و سرعت، این مقادیر به صورت صریح در معادله ی درجه اشباع قرار گرفته و درجه اشباع مشخص می شود.

معادلات حاکم

در این تحقیق سیال را به صورت دوفازی (نفت و آب)، غیر امتزاجی، و غیر قابل تراکم در نظر گرفته ایم. معادلات حرکت سیال در محیط متخلخل شامل معادلات بقای جرم و اندازه حرکت هستند. از آن جا که استفاده از این اصول در محیط متخلخل با همان شکل عمومی امکان پذیر نیست، در محیط متخلخل معمولاً از روابط نیمه تجربی استفاده می شود؛ مثلاً چون سیال در محیط متخلخل با سرعت کمی جریان می یابد به جای معادله ی بقای اندازه حرکت از معادله ی نیمه تجربی داریسی استفاده می شود.

قانون بقای جرم

معادله ی بقای جرم در محیط متخلخل عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varphi) + \left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) = q \quad (1)$$

بدین ترتیب معادله‌ی درجه اشباع عبارت خواهد بود از:^[۸]

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S_w - \frac{d}{dS} (\lambda f_w f_n) (\vec{K} \cdot \vec{\nabla} \vec{P}_{CM}) \cdot \vec{\nabla} S_w - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda f_w f_n \vec{K} \cdot \left[P_{CM} \frac{dp_c}{dS} - \vec{\nabla} ((\rho_w - \rho_n)gz) \right] \right\} = (\lambda f_w f_n p_c) \vec{\nabla} \cdot (\vec{K} \cdot \vec{\nabla} \vec{P}_{CM}) \quad (۱۹)$$

حال اگر فشار موینگی مستقل از مکان باشد، می‌توان نوشت:^[۸]

$$\vec{u} = -\lambda \vec{K} \cdot (\vec{\nabla} P - (\rho_w f_w + \rho_n f) \vec{\nabla} gz) \quad (۲۰)$$

و لذا:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_w + \vec{u}_n) = 0 \quad (۲۱)$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S_w - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda f_w f_n \vec{K} \cdot \left[\frac{dp_c}{dS} \vec{\nabla} S_w - \vec{\nabla} ((\rho_w - \rho_n)gz) \right] \right\} = 0 \quad (۲۲)$$

بدین ترتیب با کمک عملیات ریاضی فوق دستگاه معادلاتی به دست آمده است که معادلات آن وابستگی ضعیف‌تری به هم دارند. در دستگاه قبلی مجهولات یک معادله در دیگری ظاهر می‌شد در حالی که معادلات فشارکلی (معادله‌ی ۲۰) و درجه اشباع (معادله‌ی ۲۲) فقط از طریق ضرایب به هم وابسته‌اند. معادله‌ی فشارکلی از دسته معادلات بیضی است و معادله‌ی درجه اشباع معادله‌ی از نوع جابه‌جایی - بخشی است و بسته به فشار موینگی می‌تواند رفتاری کاملاً بخشی یا کاملاً جابه‌جایی داشته باشد. هنگامی که درجه اشباع کاهش می‌یابد فشار موینگی قابل اغماض است که منجر به تبدیل معادله‌ی درجه اشباع به یک معادله‌ی جابه‌جایی می‌شود. با به‌کار بردن رابطه‌ی برای فشار موینگی و همچنین رابطه‌ی برای ضریب نفوذپذیری نسبی می‌توان دستگاه معادلات فوق را برحسب مجهولات فشارکلی، سرعت کلی، و درجه اشباع فاز ترکنده حل کرد.

گسسته‌سازی معادلات

معادلات ریاضی حاکم بر رفتار جریان در محیط متخلخل بسیار پیچیده‌اند و جز در حالت‌های بسیار خاص به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. به همین دلیل برای حل این معادلات از روش‌های عددی استفاده شده است. از جمله روش‌های عددی که برای حل این معادلات استفاده می‌شود روش اجزاء محدود ترکیبی است. در این بخش گسسته‌سازی معادلات محیط متخلخل به روش اجزاء محدود ترکیبی و اجزاء محدود ترکیبی هیبرید به تفصیل آورده شده است. در گسسته‌سازی معادلات از فضای توماس - راویارت استفاده می‌شود.^[۹] لذا ابتدا به معرفی فضای توماس - راویارت پرداخته و در ادامه، معادله‌ی دارسی به وسیله‌ی اجزاء محدود ترکیبی گسسته‌شده و نحوه‌ی گسسته‌کردن معادله‌ی بقای جرم ذکر می‌شود.

فضای توماس - راویارت در یک المان

ابتدا برای سادگی یک المان مستطیلی در نظر گرفته شده است (شکل ۱). برای این المان، بردار عمود v_k و چهار ضلع A_i و همچنین چهار میدان برداری

چنان که مشاهده می‌شود این دستگاه معادلات دستگاهی کامل است که با داشتن مقدار تخلخل و مقادیر چشمه‌های دوفاز، ضریب لزجت، توابع فشار موینگی و ضریب نفوذپذیری نسبی دو فاز، و نیز مقدار ضریب نفوذپذیری سنگ مخزن به طور کامل قابل حل است. با کمی دقت مشخص می‌شود که معادلات این دستگاه به شدت به هم وابسته‌اند و همین امر باعث سخت شدن حل این دستگاه می‌شود، به طوری که ممکن است حل آنها با استفاده از روش‌های عددی مرسوم مشکل باشد. برای حل این دستگاه باید این وابستگی را از بین برد و معادلات را به شکل قابل قبول‌تری از لحاظ ریاضی نوشت. برای این کار از تعریف فشارکلی^۶ و سرعت کلی^۷ استفاده شده است.^[۷]

قبل از تبدیل این معادلات به فرم قابل قبول، فشار موینگی را چنین تعریف کرده‌اند:^[۲]

$$P_c = P_{CM}(x) p_c(S) \quad (۹)$$

ضریب $P_{CM}(x) \geq 0$ بیشترین مقدار فشار موینگی در یک نقطه‌ی خاص است، و $p_c(S)$ تابعی بدون بعد است که ویژگی‌های آن در قالب روابط ۱۰ و ۱۱ آمده است:^[۸]

$$0 \leq p_c(S) \leq 1 \quad (۱۰)$$

$$p_c(S_c) = 0 \quad (۱۱)$$

S_c درجه اشباعی است که مقدار p_c در آن صفر است. برای رسیدن به معادلات قابل قبول، ابتدا دو معادله‌ی ۵ و ۶ را با هم جمع می‌کنند. با در نظر گرفتن دوفاز به صورت غیر قابل تراکم، معادله‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_w + \vec{u}_n) = 0 \quad (۱۲)$$

اکنون قابلیت حرکت^۸ یک فاز چنین تعریف می‌شود:

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \quad i = n, w \quad (۱۳)$$

برای رسیدن به فشارکلی توابع ۱۴ و ۱۵ تعریف می‌شوند:^[۸]

$$\gamma = \int_{S_c}^S \left(f_w - \frac{1}{2} \right) \frac{dP_c}{dS} dS \quad (۱۴)$$

$$\gamma_1 = \int_{S_c}^S \frac{df_w}{dS} p_c dS \quad (۱۵)$$

در این روابط $f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}$ و $f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n}$ و فشار موینگی در درجه اشباع S_c برابر صفر است. نهایتاً فشارکلی مطابق رابطه‌ی ۱۶ تعریف می‌شود:^[۸]

$$P = \frac{1}{\gamma} (P_w + P_n) + \gamma P_{CM} \quad (۱۶)$$

با قراردادن گرفتن از طرفین معادله‌ی ۱۶ و با انجام عملیات جبری نتیجه می‌شود که:^[۸]

$$\vec{u} = \vec{u}_n + \vec{u}_w = -\lambda \vec{K} \cdot (\vec{\nabla} P + \gamma_1 \vec{\nabla} P_{CM} - \gamma_2 \vec{\nabla} gz) \quad (۱۷)$$

که در آن $\vec{u}$ سرعت کلی است و γ_2 نیز چنین تعریف می‌شود:

$$\gamma_2 = \rho_w f_w + \rho_n f_n \quad (۱۸)$$

از خاصیت ۱ می توان انتظار داشت که:

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \sum_{j=1}^4 Q_{K,j} \quad (24)$$

و از خاصیت ۲ می توان شار عبوری $\vec{q}$ از ضلع A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) را مطابق رابطه ی ۲۵ به دست آورد:

$$\int_K \vec{q} \cdot \vec{v}_K = Q_{K,j} \quad (25)$$

بدین ترتیب هر میدان برداری $\vec{q} \in \vec{X}_K$ به طور کامل و با تعیین $Q_{K,j}$ معین می شود؛ $Q_{K,j}$ شار عبوری $\vec{q}$ از ضلع A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) است. از ضرب برداری میدان های برداری فوق رابطه ی ۲۶ حاصل می شود:

$$A_{ij} = \int_K \vec{w}_j(x) \vec{w}_i(x) \quad (26)$$

بدین ترتیب ماتریس A_K برای المان K عبارت خواهد بود از:

$$A_K = [A_{ij}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

و معکوس آن نیز چنین است:

$$A_K^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

تقریب یک تابع و گرادیان آن به وسیله ی اجزاء محدود

ابتدا دامنه ی حل Ω را به صورت دلخواه و یک تابع α به صورت زیر، همچنین نمادهای زیر در نظر گرفته می شود:

$$\alpha : \Omega \rightarrow R^+$$

$$\mathbb{S}_h = \text{مجموعه اجزاء } K \text{ } \eta_h = \text{مجموعه اضلاع اجزاء } A$$

$$\mathbb{E}_h = \text{مجموعه گوشه های اجزاء } M$$

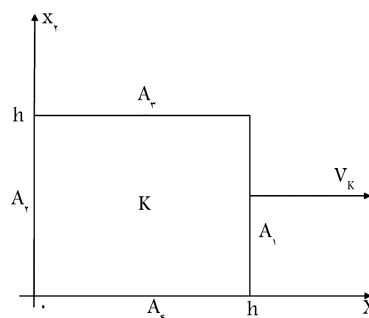
در این نوشتار توابع اسکالر (مانند فشار) در یک المان به صورت مقداری ثابت تقریب زده می شوند. حال تابع اسکالر $a(x)$ را در نظر بگیرید، تقریب این تابع در المان K برابر a_K است. برای هر المان K تابع فشار P و تابع سرعت $\vec{q}$ را چنین تقریب می زنیم:

$$P_K = \text{تقریب متوسط فشار در هر المان } K$$

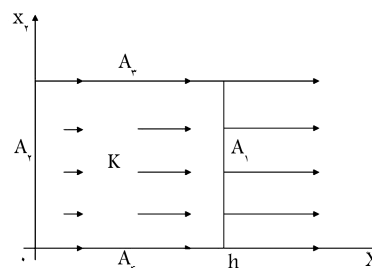
$$TP_{K,i} = \text{تقریب متوسط فشار در ضلع } A_i$$

$$\vec{q}_K = \text{تقریب سرعت در المان } K$$

از سوی دیگر، معلوم شد که مقدار $\vec{q}_K$ ، هنگامی که شار عبوری آن از هر ضلع المان معلوم باشد، کاملاً معلوم است. بنابراین فشار و سرعت یک المان، هنگامی که



شکل ۱. شکل یک المان و طریقه ی شماره گذاری اضلاع آن و بردار نرمال المان.



شکل ۲. نمونه ی میدان برداری

$\vec{w}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) چنین تعریف می شود: [۱]

$$\vec{w}_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - h}{h} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_2 - h}{h} \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_2}{h} \end{bmatrix} \quad \vec{w}_4(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - h}{h} \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای نمونه میدان برداری w_1 در شکل ۲ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می شود این میدان در هر نقطه موازی محور x_1 است، بر روی ضلع A_2 مقدار صفر می گیرد، و بر روی ضلع A_1 مقدار ثابت $(\frac{1}{h}, 0)$ به آن اختصاص می یابد. میدان های برداری دیگر نیز مانند میدان برداری w_1 هستند که با چرخش و انتقال می توان آن ها را به دست آورد.

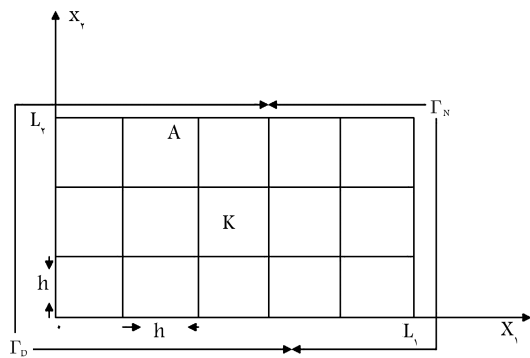
این چهار بردار مستقل خطی اند. می توان ثابت کرد که این میدان های برداری برای هر j (که $j = 1, 2, 3, 4$) دارای خواص زیر هستند:

$$1. \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_j(x) = 1 \text{ بر روی المان } K \text{ ثابت است و } \int_K \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_j(x) = 1$$

$$2. \text{ برای هر } i \text{ (که } i = 1, 2, 3, 4 \text{) می توان نوشت } \vec{w}_j(x) \cdot \vec{v}_K \text{ بر روی ضلع } A_i \text{ ثابت است و } \int_{A_i} \vec{w}_j(x) \cdot \vec{v}_K = \delta_{ij}$$

این خاصیت ها بدان معناست که میدان برداری $\vec{w}_j$ دارای شار عبوری به اندازگی ۱ از A_j و صفر از دیگر اضلاع است. دیده می شود که فضای توماس - راویارت، فضای چهار بعدی $\vec{X}_K$ است که به وسیله ی $\vec{w}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) بر روی المان K تولید شده است. بدین ترتیب هر بردار $\vec{q} \in \vec{X}_K$ را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای این فضا نوشت:

$$\vec{q}(x) = \sum_{j=1}^4 Q_{K,j} \vec{w}_j(x) \quad (23)$$



شکل ۴. نمونه میدان حل و شرایط مرزی اعمال شده.

که در آن F_K مقدار تقریبی $\int_K f(x)dx$ ، مساحت المان، ∂K مرزهای المان است. معادله‌ی پیوستگی ۳۲ به فرم ماتریس عبارت است از:

$$DIV_K Q_k = F_k \quad (33)$$

برای اعمال شرایط مرزی شکل ۴ به عنوان نمونه آورده شده است. بر روی مرز Γ_D و Γ_N شرایط مرزی از نوع فشاری و شار ثابت است:

$$\begin{aligned} TP_{K,A} &= P_{e,A} \quad \forall A \subset \Gamma_D \\ Q_{K,A} &= Q_{e,A} \quad \forall A \subset \Gamma \end{aligned} \quad (34)$$

بدین ترتیب به یک دستگاه کامل دست پیدا می‌کنیم که مجهولات آن $P_K, TP_{K,A}, Q_A$ است. حال اگر مجهولات مسئله را $TP_{K,A}$ در نظر گرفته و P_K, Q_A را برحسب $TP_{K,A}$ به دست آوریم به تقریب اجزاء محدود ترکیبی هیبرید می‌رسیم.

فرمولاسیون اجزاء محدود ترکیبی هیبرید

چنان که گفته شد مجهولات اصلی مسئله، فشار TP_K بر روی هر ضلع در نظر گرفته شده است. بعد از عملیات ریاضی و تعیین P_K, Q_A برحسب $TP_{K,A}$ دستگاه معادلات ۳۵ حاصل می‌شود:^[۱]

$$(M^{MH} - N^{MH}) TP = F^{MH} - G^{MH} \quad (35)$$

$$M_{A,A'}^{MH} = \sum_{A,A' \subset K} a_K A_{K,A,A'}^{-1} \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \quad (36)$$

$$N_{A,A'}^{MH} = \sum_{A,A' \subset K} a_K v_{K,A,A'} \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \quad (37)$$

$$F_A^{MH} = \sum_{A \subset K} \frac{\alpha_{K,A}}{\alpha_K} F_K \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \quad (38)$$

$$G_A^{MH} = \begin{cases} 0 & \text{if } A \text{ is interior} \\ Q_{e,A} & \text{if } A \subset \Gamma_N \end{cases} \quad (39)$$

مجهولات زیر در المان مشخص شده باشند، به طور کامل معین است:

$$\begin{cases} P_k \in R \\ TR_{K,j} \in R \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ Q_{K,j} \in R \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (27)$$

اگر این ۹ مجهول در یک المان تعیین شوند، می‌توان گفت که حل جریان در المان کامل شده است. از طرفی این مجهولات از هم مستقل نیستند و توسط رابطه‌ی داریسی به هم ربط دارند:

$$\vec{q} = -a \nabla P \quad (28)$$

چنان که دیده می‌شود در رابطه‌ی ۲۸ اثرات گرانش زمین در نظر گرفته نشده است و a معرف نفوذپذیری است. فرم تغییراتی^۹ معادله‌ی ۲۸ چنین است:

$$A_K Q_k = a_K (P_K DIV_K^T - TP_K) \quad (29)$$

که در آن ماتریس A_K به وسیله‌ی ماتریس‌های قبل تعریف شد، و ماتریس‌های دیگر معادله نیز چنین تعریف می‌شود:

$$DIV_K^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q_k = \begin{bmatrix} Q_{K,1} \\ Q_{K,2} \\ Q_{K,3} \\ Q_{K,4} \end{bmatrix} \quad TP_K = \begin{bmatrix} TP_{K,1} \\ TP_{K,2} \\ TP_{K,3} \\ TP_{K,4} \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله‌ی ۲۹ و با داشتن مقدار a_K, P_K در المان مورد نظر و مقادیر TP_K بر روی اضلاع این المان، مقادیر $Q_{K,i}$ و به تبع آن $\vec{q}_K$ قابل محاسبه است. حال دو المان K و K' را مطابق آنچه که در شکل ۳ آورده شده در نظر بگیرید. این دو المان در یک ضلع با هم اشتراک دارند، و لذا برای توابع TP_h و $\vec{q}_h$ داریم:

$$\begin{aligned} TP_{K,A} &= TP_{K',A} \\ Q_{K,A} + Q_{K',A} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

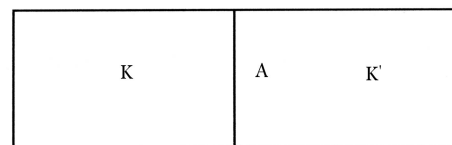
تقریب معادله‌ی پیوستگی به روش اجزاء محدود

برای تقریب معادله‌ی پیوستگی به روش اجزاء محدود ابتدا معادله‌ی ۳۱ را در نظر گرفته‌ایم:

$$\nabla \cdot \vec{q} = f(x) \quad \text{on } K \quad (31)$$

سپس آن را در یک تابع آزمون ($v \in \vec{X}$) ضرب کرده و بر روی المان K انتگرال می‌گیریم. بدین ترتیب به فرم تغییراتی زیر می‌رسیم:

$$\sum_{A \in \partial K} Q_{K,A} = F_K \quad (32)$$



شکل ۳. دو المان در داخل میدان حل.

حال با تعیین مقادیر $Q_{SK,A}$ از معادله ۴۳ و قرار دادن آن‌ها در معادله ۴۴ به معادله‌ی برحسب TS و S خواهیم رسید. همچنین S را از معادله ۴۵ برحسب TS به دست می‌آوریم و در معادله‌ی قبلی جایگذاری می‌کنیم. بدین ترتیب به دستگاه معادلاتی برحسب TS خواهیم رسید. با حل این دستگاه مقدار درجه اشباع در روی سطوح المان‌ها و به تبع آن مقدار درجه اشباع در مرکز المان‌ها به دست می‌آید. دیده می‌شود که ابتدا معادلات سرعت و فشار حل شده و با جایگزینی مقادیر سرعت در معادله‌ی درجه اشباع مقدار درجه اشباع در زمان بعدی به دست می‌آید. باید توجه داشت که جواب‌های به دست آمده به دقت بودن سرعت وابسته است. روش هیبرید معادلات سرعت و فشار را هم‌زمان حل می‌کند و دارای دقت بالایی است؛ از این رو درجه اشباع‌های به دست آمده دارای دقت قابل قبولی خواهند بود. در ادامه خواهیم دید که این ویژگی باعث می‌شود جواب‌های این روش از روش‌های اجزاء محدود استاندارد به مراتب دقیق‌تر باشد.

در این معادلات برای به دست آوردن مقادیر نفوذپذیری نسبی از مدل تد^{۱۰} استفاده شده است:^[۱]

$$k_{rw}(S_w) = S_w^2, \quad k_{rn}(S_w) = (1 - S_w)^2 \quad (50)$$

اعتبار بخشی به روش حاضر به وسیله‌ی حل معادله‌ی باکلی - لورت^{۱۱}

ابتدا با حل جریان در یک محیط متخلخل با نفوذپذیری همگن، کارایی روش هیبرید نشان داده شده است. معادله‌ی باکلی - لورت معادله‌ی درجه اشباع یک بعدی بدون در نظر گرفتن اثر فشار موینگی است. می‌توان این معادله را به دقت حل کرد و از آن به عنوان معیاری برای مقایسه‌ی کارایی روش‌ها با هم استفاده کرد. قبل از ارائه‌ی نتایج، کمیت‌های بی‌بعد مکان، زمان و درجه اشباع مطابق معادله‌های ۵۱ تا ۵۳ تعریف می‌شوند:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad (51)$$

$$t_D = \frac{u_t}{(1 - S_{or} - S_{wr})\varphi L} t \quad (52)$$

$$S = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{or} - S_{wr}} \quad (53)$$

در این معادلات S_{or} و S_{wr} به ترتیب درجه اشباع مانده‌ی آب و نفت هستند. معادله‌ی باکلی - لورت عبارت است از:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\varphi} \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

در این بخش لزجت نفت (μ_o) ۴ برابر لزجت آب (μ_w) فرض شده است. برای بررسی کارایی روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید، علاوه بر مقایسه‌ی نتایج با روش تحلیلی، آن را با روش‌های اختلاف محدود بالادست، لکس فردریچ^{۱۲} و لکس واندروف^{۱۳} مقایسه کرده‌ایم. اگر معادله‌ی ۵۴ را به روش بالادست گسسته کنیم خواهیم داشت:

$$S_i^n = S_i^{n-1} + \frac{u\Delta t}{\varphi\Delta x} (f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}) \quad (55)$$

$$v_{K,A,A'} = \frac{\alpha_{K,A}\alpha_{K,A'}}{\alpha_K} \quad (40)$$

$$\alpha_{K,A} = \sum_{A' \in \partial K} A_{K,A,A'}^{-1}$$

$$\alpha_K = \sum_{A \in \partial K} \alpha_{K,A} \quad (41)$$

در معادلات بالا، MH معرف اجزاء محدود ترکیبی هیبرید است. می‌توان ثابت کرد که دستگاه فوق دارای یک جواب است و ماتریس $(M^{MH} - N^{MH})$ متقارن و مثبت معین است.^[۹] در این ماتریس بلوک صفر روی قطر اصلی وجود ندارد، به همین دلیل ماتریس از نوع مسائل زینی نیست و می‌توان از روش‌های استاندارد آن را معکوس کرد. با حل این دستگاه TPK روی هر ضلع به دست می‌آیند و از روی آن‌ها P_K, Q_A حاصل می‌شود.

گسسته‌سازی معادله‌ی درجه اشباع

q_s مطابق معادله ۴۲ تعریف می‌شود:

$$q_s = \nabla S \quad (42)$$

فرم تغییراتی این معادله عبارت است از:

$$A_K Q_{SK} = (S_K DIV_K^T - TS_K) \quad (43)$$

که در آن ماتریس‌ها همانند ماتریس‌های تعریف شده‌ی قبلی‌اند. با توجه به معادله ۴۳ و با داشتن مقدار S_K در المان مورد نظر و مقادیر TS_K بر روی اضلاع این المان، مقادیر $Q_{SK,i}$ و به تبع آن q_s قابل محاسبه است. باتوجه به شکل ۳ این دو المان در یک ضلع با هم مشترک‌اند. برای توابع TS_h و q_s داریم:

$$TS_{K,A} = TS_{K',A} \\ Q_{SK,A} + Q_{SK',A} = 0 \quad (44)$$

می‌توان معادله‌ی درجه اشباع را چنین نوشت:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{df_w}{dS} \vec{u} \cdot \nabla S - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda f_w f_n \vec{K} \cdot \left[\frac{dp_c}{dS} \vec{\nabla} S \right] \right\} = 0 \quad (45)$$

حال معادله‌ی ۴۵ را در یک تابع آزمون (χ_k) ضرب کرده و بر روی المان K انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\begin{cases} \chi_k = 1 & \text{in } K \\ \chi_k = 0 & \text{else where} \end{cases} \quad (46)$$

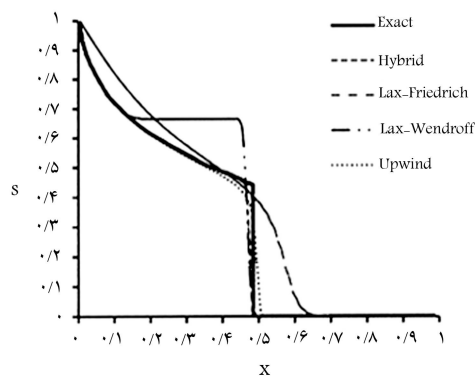
در نتیجه:

$$|K| \varphi \frac{S_k^n - S_k^{n-1}}{\Delta t} + \sigma_E \sum Q_s + \frac{df}{dc} \left[\left(\frac{1}{6} Q_1 - \frac{1}{6} Q_2 \right) Q_{s1} + \left(-\frac{1}{6} Q_1 + \frac{1}{6} Q_2 \right) Q_{s2} + \left(\frac{1}{6} Q_2 - \frac{1}{6} Q_3 \right) Q_{s3} + \left(-\frac{1}{6} Q_2 + \frac{1}{6} Q_3 \right) Q_{s4} \right] = 0 \quad (47)$$

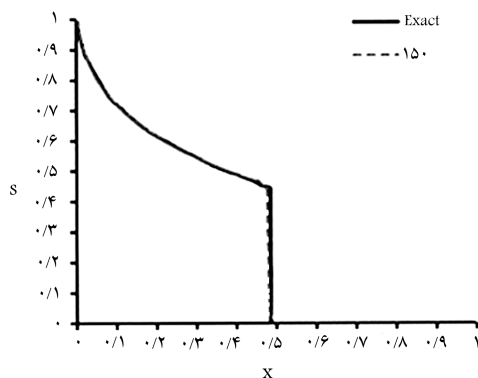
در این معادله اندیس‌های ۱ تا ۴ مطابق تعاریف شکل ۱ است؛ در معادله‌ی ۴۷ نیز σ_E چنین به دست می‌آید:

$$\sigma(S_w) = -\lambda f_w f_n \vec{K} \frac{dp_c}{dS} \quad (48)$$

$$\sigma_E \frac{1}{6} \sum_{j=1}^4 \sigma(TSA_j) \quad (49)$$



شکل ۷. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۱۰۰.



شکل ۸. نتایج حاصله از روش هیبرید برای تعداد شبکه ۱۵۰.

مطابق انتظار بهبود می‌یابد، به‌طوری که مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی دقیق‌تر شده ولی در نقاط نزدیک به نقطه‌ی ناپیوستگی جواب‌های حاصله از خطاهای زیادی برخوردارند. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش هیبرید نشان می‌دهد که این روش در تشخیص نقطه‌ی ناپیوستگی بسیار قوی است و با اضافه‌کردن تعداد شبکه خطاها به سرعت به سمت صفر میل می‌کند. همان‌طور که در شکل ۸ نشان داده شده است با تعداد شبکه‌ی ۱۵۰، به حل تقریباً دقیق خواهیم رسید.

مثال عددی دوبعدی و محیط همگن

مثال عددی دوم میدان جریانی دوبعدی است که به «پنج‌نقطه» مشهور بوده و در شکل ۹ نشان داده شده است. ابعاد این میدان $300m \times 300m$ است و ضریب نفوذپذیری و تخلخل این محیط برابر $K = 10^{-7}$ و $\varphi = 0.2$ است. یادآور می‌شود که خصوصیات این محیط به‌صورت همگن در نظر گرفته شده است. چگالی آب و نفت برابر $1000 kg/m^3$ و لزجت آب برابر $0.001 kg/(ms)$ و لزجت نفت ۴ برابر آن در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در مرز تزریق (نقطه‌ی ۰،۰) عبارت است از:

$$P_n = 210^5 [Pa], \quad q_w = 0.12 [kg/s] \quad (58)$$

شرایط مرزی در مرز تولید (نقطه‌ی ۳۰۰،۳۰۰) نیز عبارت است از:

$$S_w = 0.1, \quad q_n = -0.12 [kg/s] \quad (59)$$

و اگر به روش مرتبه اول لکس فردریچ گسسته شود، داریم: [۱۰]

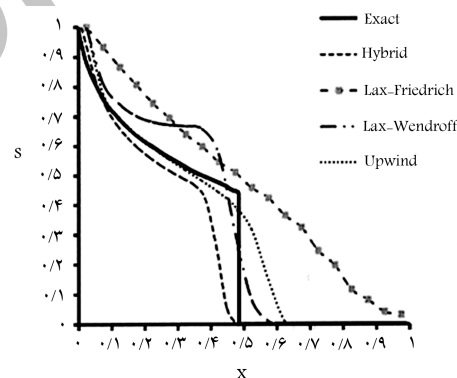
$$S_i^{n+1} = \frac{1}{2} (S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) - \frac{u \Delta t}{2 \varphi \Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) \quad (56)$$

و نیز اگر به روش مرتبه دوم لکس واندروف گسسته شود خواهیم داشت: [۱۱]

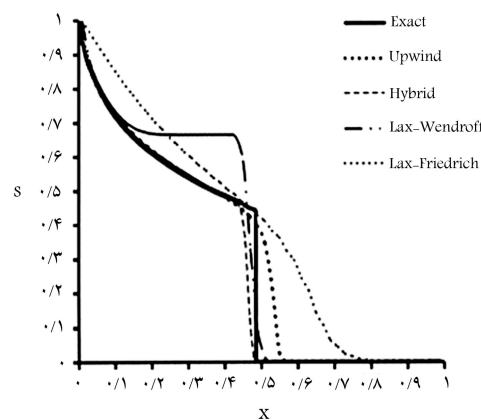
$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{u \Delta t}{2 \varphi \Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{u \Delta t^2}{2 \varphi \Delta x^2} [a_{i+\frac{1}{2}} (f_{i+1}^n - f_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}} (f_i^n - f_{i-1}^n)] \quad (57)$$

که در آن $a = \frac{\partial f}{\partial S}$. در ادامه، نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش‌ها برای حل معادله‌ی باکلی - لورت با هم مقایسه شده‌اند. این نتایج برای زمان بی‌بعد شده ۰/۳ و سه نوع اندازه شبکه‌ی ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ در دامنه یک‌بعدی هستند.

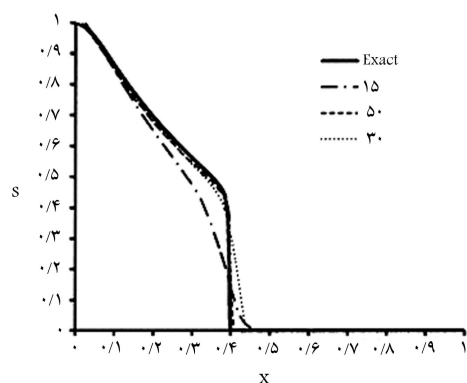
با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش مرتبه اول لکس فردریچ از دقت کمی برخوردار است و در نقاط هموار به دلیل اتلاف عددی، جواب‌ها خطای زیادی دارند. همچنین این روش در مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی ضعیف عمل می‌کند (شکل‌های ۵ تا ۷). شیوه‌ی عمل این روش آن است که برای رسیدن به جواب قابل قبول باید دامنه را به ۲۰۰۰ قسمت تقسیم کرد که زمان محاسباتی بالایی را شامل می‌شود. روش مرتبه دوم لکس واندروف دقت خوبی در مکان‌یابی محل شوک دارد و همچنین در نقاط هموار جواب‌ها از دقت بالایی برخوردارند ولی در نزدیکی محل شوک به دلیل پخش عددی بالا دارای خطای زیادی است. دیده می‌شود که حتی با اضافه‌کردن تعداد شبکه این پخش عددی از بین نمی‌رود. در روش بالادست نیز هدردهی عددی زیاد است ولی با اضافه‌کردن تعداد شبکه این هدردهی



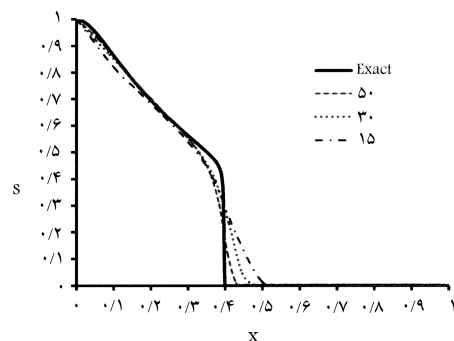
شکل ۵. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۲۰.



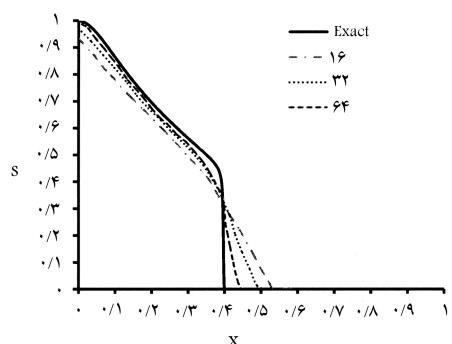
شکل ۶. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۵۰.



شکل ۹. نتایج حاصله از روش هیبرید در حل میدان شکل ۹.



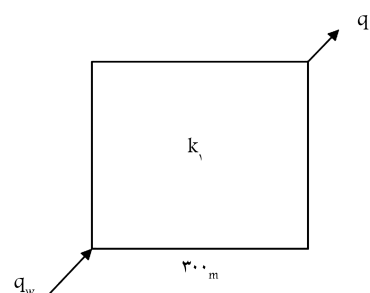
شکل ۱۱. نتایج حاصله از روش بالادست.



شکل ۱۲. نتایج حاصل از روش گلرکین بالادست توسط هوپر. [۱۱]

هوپر در روش بعدی معادلات سرعت و فشار را به وسیله روش هیبرید، و معادله درجه اشباع را به وسیله فلاکس های محدودکننده حل کرده که نتایج آن در شکل ۱۳ ارائه شده است. چنان که در این شکل مشاهده می شود، برای رسیدن به حل دقیق، هنگامی که از روش فلاکس محدودکننده استفاده می شود باید از شبکه ی 50×50 به حل دقیق خواهیم رسید. همچنین با مقایسه ی شکل های ۱۰ و ۱۳، با تعداد شبکه ی 30×30 جواب های حاصل از روش هیبرید نسبت به روش فلاکس محدودکننده به جواب دقیق بسیار نزدیک است.

در ادامه در شکل های ۱۴ الی ۱۹ خطوط تراز درجه اشباع آورده شده است. با توجه به این خطوط درمی یابیم که روش هیبرید نسبت به تغییر شبکه واکنش بهتری دارد، به طوری که با زیاد شدن تعداد شبکه جواب ها به سرعت به جواب دقیق نزدیک می شود. در روش بالادست خطوط تراز به دست آمده با تعداد تقسیمات



شکل ۹. مثال عددی دوبعدی با یک ورودی و یک خروجی.

اندیس n معرف فاز نفت (فاز غیر ترکنده) و اندیس w معرف فاز آب (فاز ترکنده) است. شرایط اولیه به صورت $S_w = 0.1$ و گام زمانی یک روز در نظر گرفته شده است؛ این محاسبات برای مدت زمان ۴۰۰ روز انجام شده است. در ادامه، نتایج به دست آمده از مدل سازی این دامنه برای همان مدت زمان ۴۰۰ روز آمده است. حل دقیق معادله درجه اشباع بر روی قطر اصلی را می توان از طریق حل معادله ی باکلی - لورت، و به این ترتیب به دست آورد: [۱۱]

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{r\varphi} \frac{\partial(rf_w)}{\partial r} = 0 \quad (60)$$

که در آن r فاصله ی شعاعی از نقطه ی تزریق است. چون در این نوشتار فرض بر این است که فازها غیر قابل تراکم اند می توان f را به فرم $f(S_w, r) = f_w(S_w)/r$ در نظر گرفت، و در نتیجه: [۱۱]

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{r\varphi} \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial r} = 0 \quad (61)$$

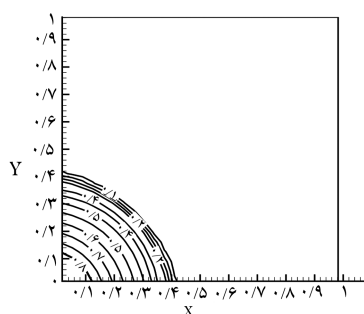
در نهایت داریم:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{u}{r\varphi} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial r} \quad (62)$$

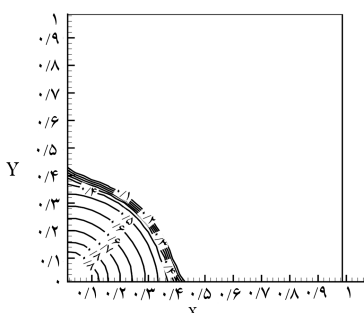
این معادله به روش اختلاف محدود با تعداد نقاط زیاد حل شده و به عنوان روش حل دقیق معرفی شده است. ابتدا برای درک بهتر از این که روش عددی هیبرید چگونه به حل دقیق همگرا می شود، مقدار درجه اشباع روی قطر اصلی برای تعداد تقسیمات متفاوت با حل دقیق این معادله مقایسه شده و در شکل ۱۰ نشان داده شده است. چنان که دیده می شود روش هیبرید با تعداد شبکه ی 50×50 کاملاً به حل دقیق نزدیک می شود.

مجدداً برای حل جریان در میدان شکل ۹، دو روش هیبرید و بالادست با یکدیگر مقایسه شده اند. با توجه به شکل های ۱۰ و ۱۱ دیده می شود که روش هیبرید با تعداد نقاط کم تر به جواب بهتری می رسد. از طرف دیگر، روش هیبرید با افزایش تعداد تقسیمات با سرعت بیشتری به جواب دقیق نزدیک می شود ولی روش بالادست در نقاط ناپوستگی نسبت به افزایش تعداد تقسیمات عکس العمل خوبی ندارد. هرچند با افزایش تعداد تقسیمات، مکان یابی نقطه ی ناپوستگی توسط این روش بهبود می یابد ولی با تعداد شبکه ی 50×50 همچنان در نقطه ی ناپوستگی دارای خطای زیادی است.

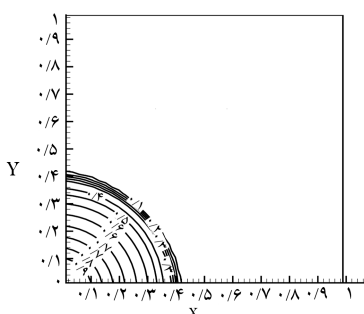
معادلات سرعت و فشار و درجه اشباع به روش اجزاء محدود گلرکین بالادست برای این میدان جریان توسط هوپر حل شده [۱۱] که نتایج آن در شکل ۱۲ آمده است. چنان که در این شکل مشاهده می شود، نتایج روش اجزاء محدود استاندارد بر اثر تغییر زیاد شبکه، چندان تغییر نمی کند ولی در روش هیبرید (شکل ۱۰) با تغییر شبکه، نتایج به سرعت به حل دقیق نزدیک می شود.



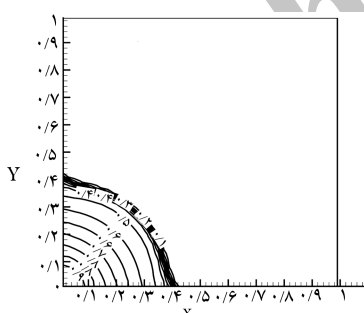
شکل ۱۶. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 30×30 روش بالادست.



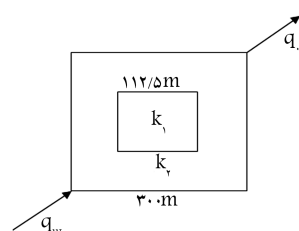
شکل ۱۷. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 30×30 روش هیبرید.



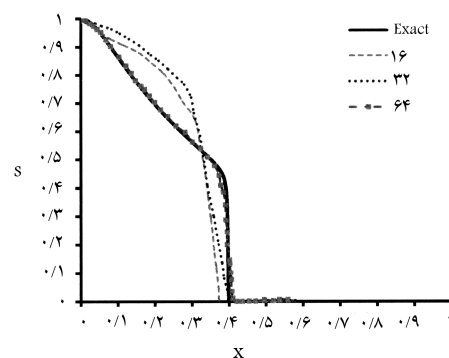
شکل ۱۸. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 50×50 روش بالادست.



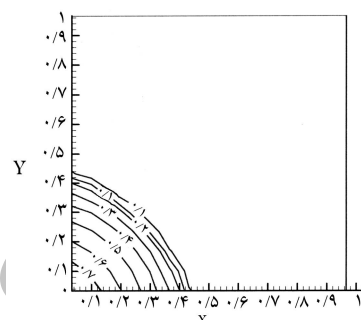
شکل ۱۹. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 50×50 روش هیبرید.



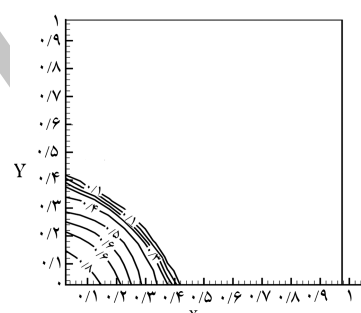
شکل ۲۰. میدان حل پنج نقطه با دو میدان نفوذپذیری متفاوت.



شکل ۱۳. نتایج حاصل از روش فلاکس محدودکننده توسط هویر.^[۱۱]



شکل ۱۴. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 15×15 روش بالادست.



شکل ۱۵. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 15×15 روش هیبرید.

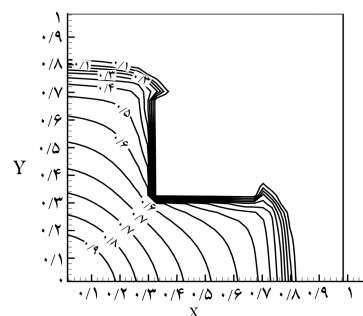
متفاوت تقریباً یکسان است و چنان که انتظار می رود این روش به تغییر شبکه چندان حساس نیست؛ همچنین جواب های شبکه کم تر با جواب های شبکه زیاد با هم فرق چندانی ندارند. تنها تفاوت موجود بین آنها این است که در شبکه بیشتر مکان یابی نقطه ی ناپیوستگی کمی دقیق تر شده است.

مثال عددی دوبعدی و محیط ناهمگن

میدان جریانی به صورت شکل ۲۰ در نظر گرفته شده است. این میدان همانند میدان حل شده ی قبلی است با این تفاوت که یک قسمت با نفوذپذیری کم تر، همانند شکل ۲۰، در داخل آن وجود دارد. ضرایب نفوذپذیری این میدان این گونه انتخاب شده اند:

$$K_1 = 10^{-1} m^2$$

$$K_2 = 10^{-7} m^2$$



شکل ۲۱. خطوط تراز درجه اشباع آب در میدان شکل ۲۰.

شکل ۲۱ خطوط تراز درجه اشباع به دست آمده از روش عددی هیبرید را نشان می‌دهد. چنان که پیداست این روش دامنه‌ی ناهمگن را هم به خوبی مدل می‌کند.

نتیجه گیری

جریان در محیط متخلخل به گونه‌یی است که تأثیر جمله‌ی جابه جایی معادلات از جمله

نفوذ بیشتر است. این طبیعت باعث می‌شود که در هنگام حل معادلات حاکم بر محیط متخلخل، جواب‌ها به دقت بودن سرعت حساس باشد. از این رو در هنگام حل معادلات سرعت و فشار باید از روش‌های با دقت بالا استفاده کرد. اما در روش‌های کلاسیک به دلیل این‌که از میدان فشار مشتق گرفته شده و مشتق‌گیری عددی دارای خطای زیادی است، دقت قابل قبولی ندارند. به همین دلیل برای به دست آوردن جواب‌های قابل قبول، در این نوشتار معادلات سرعت و فشار توسط اجزاء محدود ترکیبی هیبرید به صورت هم زمان حل شده و لذا عملیات مشتق‌گیری از میدان فشار حذف شده است. این امر باعث می‌شود که میدان سرعت به دست آمده از این روش از دقت بالایی برخوردار باشد. نتایج نشان داده است که جواب‌های به دست آمده از این روش نسبت به روش‌های دیگر، از جمله روش‌های اختلاف محدود، به حل دقیق نزدیک تر باشند. هنگامی که جواب‌های حاصله از روش گالرکین با جواب‌های روش هیبرید مقایسه می‌شوند، قدرت روش هیبرید نمایان می‌شود. همچنین نشان داده شده که این روش در شبکه‌ی درشت تر دقت مناسب تری در مقایسه با روش‌های اختلاف محدود دارد.

علاوه بر این روش هیبرید از مهم ترین خاصیت المان محدود برخوردار است که می‌توان از شبکه‌های غیر مستطیلی استفاده کرد. لذا برای محیط‌های متخلخل به شدت ناهمگن نیز قابل کاربرد است.

پانویس

1. numerical dissipation
2. upwind
3. mixed-finite element
4. saddle point problem
5. mixed-hybrid finite element
6. global pressure
7. global velocity
8. mobility
9. variational
10. todd
11. Buckley-Leverett
12. Lax-Friedrich
13. Lax-Wendroff
14. numerical dispersion
15. five-spot

منابع

1. Chavent, G., and Roberts, J.E. "A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite elements and standard finite difference approximations for the determination of velocities in water flow problems", *Adv. Water, Resources.*, **14**, pp. 329-348 (1991).
2. Durlofsky, L.J. "Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities", *Water Resources Research*, **30**, pp. 965-973 (1994).
3. Masud, A., and Hughes, T.J.R. "A stabilized mixed-finite element method for Darcy flow", *Comput. Methods*

Appl. Mech. Engrg, **191**, pp. 4341-4370 (2002).

4. Mose, R.; Siegel, P.; Ackerer, P., and Chavent, G. "Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?", *Adv. Water Resources*, **30**(11), pp. 3001-3012 (1994).
5. Chavent, G.; and Jaffre, J. "Mathematical models and finite elements for reservoir simulation", North-Holland, Amsterdam, (1986).
6. Aziz, K., and Settari, A. "Petroleum reservoir simulation", *Elsevier*: New York, (1986).
7. Bastian, P. "Numerical computation of multiphase flows in porous media", Christian-Albrechts-Universität at Kiel, (1999).
8. Ferdousi, P.A., and Manzari, M.T. "A space-time finite element formulation for simulation of immiscible two phase flow in porous media", *Thirteenth Conference on Finite Elements For Flow Problem*, 4-6 April, Swansea, Wales, United Kingdom (2005).
9. Helmig, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface*, Springer, Berlin, (1997).
10. Shokri, N. "Numerical simulation of two-phase flow in porous media using flux limiters", MSc Thesis, School of Mechanical Engineering, Sharif Univ. Tech. (2006).
11. Huber, R., and Helmig, R. "Multiphase flow in heterogeneous porous media : a classical finite element method versus an implicit pressure-explicit saturation-based mixed finite element-finite volume approach", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **29**, pp. 899-920 (1999).