of SID

ماهنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی جابجایی ترکیبی با استفاده از مشخصه‌های چند بعدی

علیرضا رستمزاده خسروشاهی[1]، سید اسماعیل رضوی[2*]، سید مهدی میرساجدی[3]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، ، تهران، ایران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
* تبریز، صندوق پستی 5166616471، razavi@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 14 آبان 1396
پذیرش: 18 اسفند 1396
ارائه در سایت: 24 فروردین 1397

کلید واژگان:
مشخصه‌های چند بعدی
تراکم‌پذیری مصنوعی
معادلات ناویر- استوکس
جابجایی ترکیبی

چکیده

در این مقاله یک روش جدید برمبنای روش مشخصه‌های چند بعدی برای حل معادلات ناویر- استوکس و انرژی در جریان‌های تراکم‌ناپذیر پایا ارائه شده است. روش‌های قبلی بر پایه مشخصه‌ها در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، فرض یک‌بعدی بودن موضعی جریان را به کار برده‌اند و در مراجع به خطای ناشی از این ساده‌سازی اشاره شده است. در تحقیق حاضر، از روش مشخصه‌های چند بعدی مصنوعی برای یافتن مسیر انتشار اطلاعات استفاده شده است. معادلات سازگاری و متغیرهای ریمن تعمیم یافته برای معادلات ناویر- استوکس و انرژی استخراج شده و از این معادلات برای یافتن شار جابجایی در مرز سلول‌ها استفاده شده است. برای آزمون دقت و سرعت طرح ارائه شده، جریان سیال تراکم‌ناپذیر پایا در داخل حفره مربعی و جریان اطراف استوانه دایره‌ای همراه با انتقال گرما برای دامنه وسیعی از اعداد رینولدز و گراشهف حل شده است. همچنین جهت مقایسه، روش مشخصه‌ها به همراه میانگین‌گیری برای معادله انرژی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده بیانگر همگرایی سریعتر روش جدید نسبت به روش مشخصه‌های معمولی و میانگین‌گیری می‌باشد. در اعداد ریچاردسون بالا، روش میانگین‌گیری همگرا نمی‌شود ولی روش ارائه شده در این مقاله، دارای سرعت همگرایی بالایی می‌باشد.

Multidimensional Characteristic Modeling of Combined Convection Flows

Alireza Rostamzadeh Khosroshahi[1], Seyed Esmail Razavi[2*], Seyed Mahdi Mirsajedi[3]

1- Department of Mechanical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2- School of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
3- Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
* P.O.B. 5166616471, Tabriz, Iran, razavi@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 November 2017
Accepted 09 March 2018
Available Online 13 April 2018

Keywords:
Multidimensional characteristic
Artificial compressibility
Navier-Stokes equations
Combined Convection

ABSTRACT

Present study proposes a new multidimensional artificially characteristic-based (MACB) scheme for simulation of combined convection flows. Multidimensional characteristic structure for energy propagation in incompressible flow is derived for the first time. Four pseudo-waves are selected and equations are discretized along them to observe the physical behavior of domain. Viscous fluxes are computed by variables derivatives at the cell interfaces and for time discretization, a 4th-order Runge-Kutta method was used. According to the new scheme, two-dimensional flow with heat transfer in a square cavity and forced convection around a circular cylinder are solved for a wide range of Reynolds and Grashof numbers. Also, for comparison purposes, the CB scheme with averaging for energy equation is used. It was found that MACB has remarkable faster convergence in comparison with CB scheme and averaging methods. Also, by using MACB scheme, maximum permissible CFL number can be increased 80 percent in comparison to CB scheme. At higher Richardson numbers, the conventional flux averaging was failed to converge properly while MACB scheme presents the most rapid convergence. The computed results of MACB scheme are in good agreement with the benchmark solutions.

1- مقدمه

حل جریان‌های سیال تراکم‌ناپذیر توسط روش‌های مختلف عددی، طی سال‌های متمادی مورد توجه محققان بوده و روش‌های عددی مختلفی برای حل آن‌ها ارائه شده است. مشکل اساسی در حل این جریان‌ها، نحوه یافتن ارتباط بین میدان سرعت و فشار و در نهایت ارضای معادله پیوستگی می‌باشد. روش تراکم‌پذیری مصنوعی برای اولین بار توسط کورین در سال 1967 برای حل پایای معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر ابداع شد [1].

وی برای مرتبط ساختن معادلات مومنتوم و پیوستگی به یکدیگر و هذلولوی کردن دستگاه معادلات حاکم و امکان استفاده از روش زمانروی، مفهوم جدیدی به نام تراکم‌پذیری مصنوعی را ابداع کرد که با این روش، معادلات ناویر- استوکس از ماهیت بیضوی- سهموی به ماهیت سهموی- هذلولوی تبدیل می‌شوند. روش‌های تجزیه اختلاف شار از نوع گودونف[1] با حلگرهای ریمن مختلف از جمله روش رو[2] جهت محاسبه بردارهای شار جابجایی در

[1] Godunov
[2] Roe

www.SID.ir

Archive of SID

روش حجم محدود، به طور وسیعی به کار رفته‌اند [2]. دریکاکیس و همکاران [3]، روش جدیدی با عنوان روش مشخصه‌ها[1]، برمبنای مشخصه‌های یک‌بعدی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر دوبعدی در یک مختصات منحنی‌الخط و شبکه با سازمان ارایه دادند. ژائو و همکاران [4] روش ارائه شده توسط دریکاکیس را به یک روش بالادست مرتبه بالا بر اساس مشخصه‌های یک‌بعدی محلی در مرز بین دو سلول برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما در شبکه‌های دوبعدی و سه‌بعدی بی‌سازمان گسترش دادند. زینکویچ و همکاران، روش مشخصه‌ها را برای جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر در حالت‌های صریح و نیمه‌ضمنی فرمول‌بندی نمودند و مشخصه‌های مهم این روش، شامل پایداری و دقت طرح را در جریان‌های مختلف مورد ارزیابی قرار دادند [5]. نیتیاراسو و همکاران، با معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی و روش المان محدود، جریان‌های آشفته تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایا را بر اساس جداسازی معادلات و گسسته‌سازی به روش مشخصه‌ها، حل کردند [6]. سو و همکاران، روش مشخصه‌های اصلی و بازنگری شده را با هم مقایسه نمودند. آن‌ها هر دو روش را روی جریان لزج سیال اطراف استوانه اعمال نموده و نتیجه‌گیری نمودند که هر دو روش دارای سرعت همگرایی و دقت بالایی می‌باشند ولی، روش مشخصه‌های اصلی به دلیل سادگی کاربرد آن نسبت به روش بازنگری شده دارای مزیت می‌باشد [7]. ژو و همکاران، مقایسه بین روش مشخصه‌ها برای شبکه لتیس- بولتزمن[2] و طرحی براساس سینماتیک گازها را برای جریان‌های سرعت پایین ارائه نمودند. آن‌ها طرحهای خود را روی سه جریان مختلف اعمال نمودند و نتایج به‌دست آمده نشان داد که در اندازه شبکه یکسان، طرح بر مبنای سینماتیک گازها دارای دقت بالاتری است ولی هزینه محاسباتی آن دو برابر بیشتر از روش مشخصه‌ها می‌باشد [8]. بیشتر طرح‌های محاسباتی موجود برای تخمین بردارهای شار جابجایی در مرز بین دو سلول در حالت‌های دو و سه بعدی، براساس فرض جریان به صورت یک بعدی موضعی و در جهت عمود بر مرز سلول است. فرض انجام شده بر این اساس است که تغییرات در مقادیر متغیرها در مرز سلول‌ها تنها تحت تاثیر بردارهای شار عمود بر آن قرار داشته و بردارهای شار موازی با مرز، هیچ‌گونه دخالتی در تغییرات متغیرها روی مرز بین دو سلول ندارند. این فرض باعث صرفنظر کردن از فیزیک واقعی مساله شده و سبب ایجاد وابستگی غیرفیزیکی حل عددی به شبکه می‌شود که مطلوب نیست. به همین دلیل، تلاش برای ارائه طرح‌های محاسباتی بالادست در حالت‌های چند بعدی همواره مورد توجه محققان دینامیک سیالات محاسباتی بوده است. به دلیل مشخص نبودن دقیق ساختار مشخصه‌ای معادلات چند بعدی اویلر و در دست نبودن جهت‌های غالب برای انتخاب متغیرهای بالادست، روش‌های مبتنی بر مشخصه‌های چند بعدی تا به امروز نیز مورد بحث و بررسی قرار دارند. برخلاف حالت یک بعدی، در حالت دوبعدی بی‌نهایت مسیر برای انتقال اطلاعات موجود است و انتخاب مسیرهای غالب برای انتشار امواج در داخل میدان جریان سیال، جزو مسائل مورد بحث می‌باشد. بائو و همکاران، الگوریتمی براساس بسط سری سری تیلور در راستای مشخصه‌های معادله مومنتوم ارائه دادند. آن‌ها با حل معادله پواسون برای فشار، میدان فشار را مستقل از میدان سرعت به‌دست آوردند و نتایج خود را با روش مشخصه‌های کلاسیک مقایسه نمودند. با اعمال طرح پیشنهادی خود روی جریان سیال با شبکه‌بندی‌های مختلف، آن‌ها دقت عددی بالایی را نسبت به روش مشخصه‌های کلاسیک گزارش نمودند [9].

جو یک طرح حجم محدود مرتبه بالا برای معادله اویلر یک بعدی ارائه نمود که دارای دقت بالا برای گسسته‌سازی زمانی می‌باشد [10]. شاپیرو و همکاران [11] روش مشخصه‌ها در جریان تراکم‌ناپذیر را در دو حالت پایستار و ناپایستار مقایسه نمودند. نتایج حاصل از تحلیل مقادیر ویژه نشان می‌دهد که روش ناپایستار سریع‌تر همگرا می‌شود. هجران‌فر و همکاران، شرایط مرزی مشخصه‌ای را برمبنای تراکم‌پذیری مصنوعی برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر ارائه دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که استفاده از فرم عمومی معادلات مشخصه‌ای روی مرزهای دوردست به دلیل ویژگی غیر انعکاسی آن‌ها، سبب تسریع در حل عددی شده و دقت حل نیز نسبت به شرایط مرزی متداول بهبود می‌یابد [12-13]. مازاروتی و همکاران [14] مقایسه بین دو روش صریح و شبه ضمنی را انجام دادند و اعلام نمودند که با وجود آنکه در اکثر مسائل، دو روش نتایج یکسانی ارائه می‌دهند ولی روش صریح به دلیل سهولت اعمال آن بیشتر کاربرد دارد. رضوی و همکاران، روش مشخصه‌های چند بعدی مصنوعی را برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر فرمول بندی نمودند [15]. زمزمیان و همکاران نیز روش ارائه شده را برای دو نوع جریان مورد ارزیابی قرار دادند [16]. در مقاله حاضر برای اولین بار ساختار مشخصه‌های چند بعدی مصنوعی مربوط به معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی برای معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی ارائه شده و براساس آن یک روش بالادست چند بعدی مصنوعی بر پایه مشخصه‌ها برای تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما به دست آمده است و بر مبنای طرح ارائه شده، جریان تراکم‌ناپذیر داخل حفره مربعی و نیز جریان حول استوانه همراه با انتقال گرما برای محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و گراشهف حل شده است.

2- فرمول بندی ریاضی مشخصه‌های چند بعدی

معادلات ناویر- استوکس و انرژی برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر در حالت دوبعدی به صورت معادلات (1) می‌باشند [4]:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}_c=\nabla\cdot\vec{F}_v+S$$
$$W=\begin{bmatrix}p\\ \vec{U}\\ T\end{bmatrix},\qquad \vec{F}_c=\begin{bmatrix}\beta^2\vec{U}\\ \vec{U}\vec{U}+\frac{p}{\rho}\delta_{ij}\\ T\vec{U}\end{bmatrix}$$
$$\vec{F}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{ij}\\ \vec{q}\end{bmatrix},\qquad S=\begin{bmatrix}0\\ \beta_{\text{ex}}\Delta T^*\times T/\text{Fr}\\ \vec{q}\\ \Phi\end{bmatrix} \tag{1}$$

تانسور تنش‌های لزج و شار گرمایی مطابق رابطه (2) می باشند.

$$\tau_{ij}=\frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\qquad \vec{q}=\frac{1}{\text{Re Pr}}\nabla T \tag{2}$$

برای بی‌بعدسازی معادلات (1) از پارامترهای زیر استفاده می شود:

$$(x,y)=\left(\frac{x^*}{l^*},\frac{y^*}{l^*}\right),t=\frac{t^*}{l^*/U_\infty^*},(u,v)=\left(\frac{u^*}{U_\infty^*},\frac{v^*}{U_\infty^*}\right)$$
$$p=\frac{p^*-p_\infty^*}{\rho_\infty(U_\infty^*)^2},\qquad T=\frac{T^*-T_{\text{ref}}^*}{T_\infty^*-T_{\text{ref}}^*} \tag{3}$$

در این قسمت، ساختار مشخصه‌های دوبعدی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی به همراه انتقال گرما استخراج شده است. تعمیم به حالت سه‌بعدی عیناً مشابه دوبعدی است. برای به‌دست آوردن ساختار مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی، ابتدا معادلات اویلر متناظر مورد بررسی قرار می‌گیرد [3]. جملات لزج به صورت جملات چشمه در معادلات وارد شده و تاثیری بر روی ساختار مشخصه‌های معادلات ندارند. معادلات اویلر متناظر با معادلات

[1] Characteristics-based (CB)
[2] Lattice Boltzmann

www.SID.ir

Archive of SID

تراکم‌پذیری مصنوعی دوبعدی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=0 \end{cases} \quad (4)$$

در معادلات (4)، η ضریب پیوند معادله انرژی به دیگر معادلات می‌باشد. لازم به توضیح است که η دامنه محدودی داشته و توسط آزمایش‌های عددی مقدار بهینه آن انتخاب می‌شود. در این مقاله، فشار به‌عنوان متغیر اصلی انتخاب شده است و دلیل این امر نیز وجود مشتقات فشار به‌طور صریح در معادلات مومنتوم می‌باشد. جهت یافتن ساختار مشخصه‌های معادلات، سطح مشخصه‌ای به شکل $f(x,y,t)$ فرض می‌شود. با استفاده از روابط سینماتیک، می‌توان بین مشتقات جزئی و مشتقات کامل در روی سطح f ارتباط برقرار کرد. با استفاده از معادلات (4)، مشابه با عملیات انجام شده برای سیال تراکم‌پذیر در مرجع [17] داریم

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta}f_t\,dp+f_x\,du+f_y dv+0\,dT=0 \\ f_x\,dp+\psi\,du+0\,dv+0\,dT=0 \\ f_y\,dp+0\,du+\psi\,dv+0\,dT=0 \\ \frac{1}{\eta}f_t\,dp+0\,du+0\,dv+\psi\,dT=0 \end{cases} \quad (5)$$

در روابط (5) زیرنویس‌ها نشانگر مشتقات پاره‌ای هستند و داریم:

$$\psi=f_t+uf_x+vf_y \quad (6)$$

برای سازگاری دستگاه معادلات (5)، باید دترمینان ضرایب دستگاه برابر با صفر شود که از آن‌جا روابط (7) به‌صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$\psi=0\,,\quad \psi=\frac{\beta}{f_t}(f_x^2+f_y^2) \quad (7)$$

طبق معمول معادلات اویلر، بردار سرعت مجازی به‌صورت $\vec{V}=(u,v,1)$ و بردار عمود بر سطح مشخصه به‌صورت $\vec{n}=(\cos\varphi\,,\sin\varphi,n_t)$ در نظر گرفته می‌شود [18]. با درنظر گرفتن بردار عمود متناظر و مقایسه آن با بردار عمود بر سطح داریم:

$$\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}=\cos\varphi\,,\ \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}=\sin\varphi\,,\ \frac{f_t}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}=n_t \quad (8)$$

در صورتی‌که روابط (7)، برحسب بردار عمود بر سطح مشخصه و بردار سرعت مجازی نوشته شوند، روابط (9) حاصل خواهند شد.

$$\vec{V}\cdot\vec{n}=0\,,\quad \vec{V}\cdot\vec{n}=\frac{\beta}{n_t} \quad (9)$$

در روابط (9)، $\vec{V}\cdot\vec{n}=0$ بیانگر خطوط جریان مجازی سیال می‌باشد و از رابطه دوم داریم:

$$\vec{V}\cdot\vec{n}=u\cos\varphi+v\sin\varphi+n_t=\frac{\beta}{n_t} \quad (10)$$

با حل معادله (10) داریم:

$$n_t=\frac{1}{2}[-(u\cos\varphi+v\sin\varphi) \pm\sqrt{(u\cos\varphi+v\sin\varphi)^2+4\beta}\,]=n_1\,,n_2 \quad (11)$$

می‌توان ثابت کرد که در رابطه (11)، یکی از ریشه‌های معادله همواره منفی و دیگری همواره مثبت است که این مساله بیانگر ساختار دوگانه صفحات مشخصه است. مطابق "شکل 1"، کنج ماخ در هر نقطه بر مخروط ماخ گذرنده از آن نقطه مماس است. سطوح مشخصه در امتداد زوج خطوط مشخصه بر مخروط ماخ گذرنده از آن نقطه مماس می‌باشند که در واقع مسیرهای انتشار اطلاعات از نقطه فرضی M به زمان بعدی می‌باشند. جهت یافتن مسیرهای انتشار امواج در روی یک کنج ماخ داریم:

$$\frac{df}{dt}=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}=0$$
$$\Rightarrow\ n_t+\frac{dx}{dt}\cos\varphi+\frac{dy}{dt}\sin\varphi=0 \quad (12)$$

با مقایسه معادلات (10) و (12) داریم:

$$\begin{cases} n_t+\frac{dx}{dt}\cos\varphi+\frac{dy}{dt}\sin\varphi=0 \\ n_t+u\cos\varphi+v\sin\varphi=\frac{\beta}{n_t} \end{cases} \quad (13)$$

با کسر دو رابطه از یکدیگر می‌توان نوشت:

$$\left(u-\frac{dx}{dt}\right)\cos\varphi+\left(v-\frac{dy}{dt}\right)\sin\varphi=\frac{\beta}{n_t} \quad (14)$$

در نتیجه معادلات مسیرهای انتشار امواج به‌صورت روابط (15) خواهند بود:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\mathrm{u}-\frac{\beta}{n_t}\cos\varphi \\ \frac{dy}{dt}=v-\frac{\beta}{n_t}\sin\varphi \end{cases} \quad (15)$$

برخلاف حالت معادلات اویلر دوبعدی، در این‌جا سطح مقطع کنج ماخ با صفحه xy یک بیضی است که محورهای آن موازی محورهای مختصات هستند. برای به دست آوردن معادلات حاکم در روی مسیرهای مشخصه، با جاگذاری ψ در معادلات مومنتوم در دستگاه معادلات (5) داریم:

$$\begin{cases} \frac{\beta}{n_t}du+\cos\varphi\,dp=0 \\ \frac{\beta}{n_t}dv+\sin\varphi\,dp=0 \\ \frac{\beta\eta}{n_t^2}dT+dp=0 \end{cases} \quad (16)$$

با انتگرال‌گیری از روابط (16) در طول مسیرهای مشخصه، متغیرهای ریمن تعمیم یافته مطابق روابط (17) به‌دست می‌آیند.

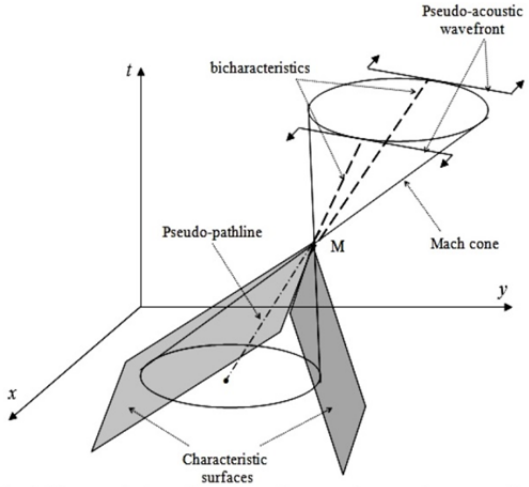


Fig. 1 Characteristic surfaces, pseudo-acoustic wave front, pseudo-pathline, Mach cone and bicharateristics

شکل 1 سطوح مشخصه، سطوح موج، خط جریان مجازی، مخروط ماخ و مسیرهای دوگانه مشخصه

www.SID.ir

Archive of SID

$$\begin{cases} R = u + \dfrac{n_t \cos\varphi}{\beta} p \\ Q = v + \dfrac{n_t \sin\varphi}{\beta} p \end{cases} \quad (17)$$

روابط مشخصه‌های به دست آمده را می‌توان برای محاسبه بردارهای شار در مرز مشترک بین دو سلول در روش حجم محدود استفاده کرد. به‌منظور ایجاد یک طرح محاسباتی بالادست چندبعدی براساس مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی، می‌توان مسیرهای مشخصه مختلف و روابط سازگاری متناظر با آن‌ها را برای محاسبه بردارهای شار مرز مشترک به کار برد. در این مقاله، یک روش جدید بالادست کاملا دوبعدی بر پایه مشخصه‌ها برای گسسته‌سازی معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر- استوکس تصحیح شده با روش تراکم‌پذیری مصنوعی ارائه شده است. روابط سازگاری (16) برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار می‌گیرند در حالی‌که بردارهای شار لزج با طرح معمولی مرکزی گسسته می‌شوند.

3- بردارهای شار جابجایی

به‌منظور محاسبه بردارهای شار جابجایی در روی مرز مشترک دو سلول از مقادیر زمان قبل، چهار موج مجازی اکوستیک با مسیرهای تصویر شده موازی و عمود بر مرز مشترک دو سلول انتخاب شده‌اند. مطابق "شکل 2"، سطح مقطع کنج ماخ متناظر با نقطه موردنظر در روی مرز مشترک دو سلول با صفحه xy، نشان دهنده محدوده فیزیکی انتشار اطلاعات از زمان قبل می‌باشد که نقطه مذکور را در زمان حاضر تحت تاثیر قرار می‌دهند. همان‌طور که در "شکل 2" نشان داده شده است، به‌منظور در نظر گرفتن فیزیک واقعی چند بعدی جریان، چهار موج اکوستیک مجازی متناظر با شبکه انتخاب شده و معادلات (16) در روی آن‌ها گسسته‌سازی شده‌اند. انتخاب تعداد و زوایای موج‌های اکوستیک مجازی اختیاری بوده و در هر حالت منجر به طرح‌های محاسباتی مختلفی می‌شود.

طرح محاسباتی پیشنهادی در این مقاله، چهار موج اصلی متناظر با اضلاع شبکه را در نظر می‌گیرد. با توجه به "شکل 3"، برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در نقطه * در روی مرز مشترک دو سلول i,j و $i+1,j$، ابتدا خطوط واصل بین نقطه * و مراکز دو سلول i,j و $i+1,j$ در نظر گرفته می‌شوند که در شکل با امتدادهای 1 و 2 نشان داده شده‌اند. محل تقاطع بیضی ماخ با امتداد خطوط رسم شده به عنوان محل انتخاب دو موج

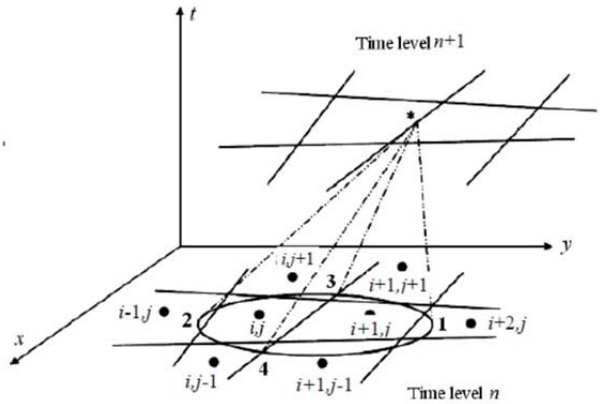


Fig. 2 Intersection of local Mach cone with time level plane

شکل 2 تقاطع کنج ماخ با صفحه زمان

اکوستیک φ_1 و φ_2 در نظر گرفته شده است. برای انتخاب دو موج دیگر، محل تقاطع بیضی ماخ با ضلع مشترک بین دو سلول $i,j+1$ و $i+1,j+1$ به‌عنوان موج φ_3 و محل تقاطع آن با ضلع مشترک بین دو سلول $i,j-1$ و $i+1,j-1$ به‌عنوان موج φ_4 در نظر گرفته شده است.

شش رابطه سازگاری متناظر با موج‌های φ_1 و φ_2 عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{n_{t1}} du + \cos\varphi_1 \, dp = 0 \\ \dfrac{\beta}{n_{t1}} dv + \sin\varphi_1 \, dp = 0 \\ \dfrac{\beta\eta}{n_{t1}^2} dT + dp = 0 \\ \dfrac{\beta}{n_{t2}} du + \cos\varphi_2 \, dp = 0 \\ \dfrac{\beta}{n_{t2}} dv + \sin\varphi_2 \, dp = 0 \\ \dfrac{\beta\eta}{n_{t2}^2} dT + dp = 0 \end{cases} \quad (18)$$

مشابه روابط (18)، می‌توان برای موج‌های φ_3 و φ_4 نیز شش رابطه سازگاری نوشت. با گسسته‌سازی معادلات (18) در طول خطوط مشخصه متناظر داریم:

$$\begin{cases} p^* - p_1 + A(u^* - u_1) = 0 \\ p^* - p_1 + B(v^* - v_1) = 0 \\ p^* - p_1 + C(T^* - T_1) = 0 \\ p^* - p_2 + D(u^* - u_2) = 0 \\ p^* - p_2 + E(v^* - v_2) = 0 \\ p^* - p_2 + F(T^* - T_2) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

در معادلات (19) مقادیر A، B، C، D، E و F به‌صورت معادلات (20) و (21) می‌باشند.

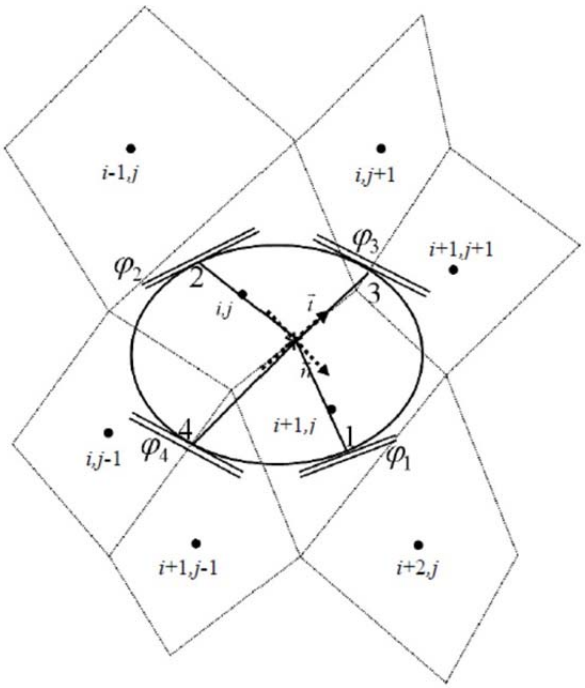


Fig. 3 Proposed stencil for evaluating convective fluxes

شکل 3 طرح محاسباتی پیشنهادی برای محاسبه جملات جابجایی در مرز مشترک دو سلول

www.SID.ir

Archive of SID

$$\begin{cases} A=\dfrac{2\beta}{\cos\varphi_1[-u_1\cos\varphi_1-v_1\sin\varphi_1+k_1]} \\ B=\dfrac{2\beta}{\sin\varphi_1[-u_1\cos\varphi_1-v_1\sin\varphi_1+k_1]} \\ C=\dfrac{4\beta\eta}{2k_2^2+4\beta-2k_1k_2} \\ D=\dfrac{2\beta}{\cos\varphi_2[-u_2\cos\varphi_2-v_2\sin\varphi_2+k_3]} \\ E=\dfrac{2\beta}{\sin\varphi_2[-u_2\cos\varphi_2-v_2\sin\varphi_2+k_3]} \\ F=\dfrac{4\beta\eta}{2k_4{}^2+4\beta-2k_3k_4} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} k_1&=\sqrt{(u_1\cos\varphi_1+v_1\sin\varphi_1)^2+4\beta} \\ k_2&=u_1\cos\varphi_1+v_1\sin\varphi_1 \\ k_3&=\sqrt{(u_2\cos\varphi_2+v_2\sin\varphi_2)^2+4\beta} \\ k_4&=u_2\cos\varphi_2+v_2\sin\varphi_2 \end{aligned} \quad (21)$$

شش معادله مشابه نیز برای موج‌های φ_3 و φ_4 وجود دارد. در روابط (19) مقادیر u^*، v^*، p^* و T^* نشانگر متغیرهای اولیه جریان بر روی مرز مشترک بین دو سلول می‌باشند. ابتدا مقادیر u^* و p^* از روابط اول و چهارم، مقادیر v^* و p^* از روابط دوم و پنجم و T^* و p^* از روابط سوم و ششم در معادلات (19) محاسبه می‌شوند. مقدار p^* برابر با میانگین دو مقدار به‌دست آمده در نظر گرفته می‌شود. با توجه به استفاده از معادلات سازگاری مربوط به موج‌های φ_1 و φ_2 مقادیر u^* و v^* به‌دست آمده از این طریق به‌عنوان مولفه‌های سرعت در جهت n در نظر گرفته می‌شوند. با انجام عملیات مشابه برای روابط سازگاری متناظر با φ_3 و φ_4، مولفه‌های سرعت در جهت t به دست می‌آیند. درنهایت، بردار سرعت در روی مرز مشترک دو سلول از برآیند دو بردار به‌دست آمده مشخص شده و فشار در روی مرز مشترک از میانگین‌گیری دو مقدار به‌دست آمده برای p^* مشخص می‌شود. به این ترتیب مقادیر ستاره‌دار از 12 رابطه سازگاری متناظر با موج‌های φ_1، φ_2، φ_3 و φ_4 و از مقادیر متغیرهای سیال در نقاط 1، 2، 3 و 4 از زمان قبل به دست می‌آیند که برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار می‌گیرند. با استفاده از این روش، یک طرح محاسباتی کاملا بالادست دوبعدی با تکیه بر مشخصه‌های دوبعدی مصنوعی معادلات تراکم‌ناپذیر ارائه شده است. به منظور بهبود طرح ارائه شده به دقت مرتبه دوم، نقطه 1 از سلول‌های $(i+1,j)$ و $(i+2,j)$ و نقطه 2 از سلول‌های (i,j) و $(i-1,j)$ درونیابی شده‌اند. همچنین مقادیر جریان در نقطه 3 از مقادیر سلول‌های $(i,j+1)$ و $(i+1,j+1)$ و در نقطه 4 از مقادیر سلول‌های $(i-1,j)$ و $(i+1,j-1)$ درونیابی شده‌اند. درونیابی مورد استفاده برای محاسبه مقادیر جریان در نقاط 1 تا 4 مشابه با روش‌های درونیابی مورد استفاده در موارد مشابه برای طرح‌های برپایه مشخصه‌ها در معادلات تراکم‌پذیر اویلر می‌باشد. به منظور افزایش مرتبه طرح محاسباتی از مرتبه اول به مرتبه دوم، دامنه گسترده‌تری از محدوده تاثیر در نظر گرفته می‌شود و درونیابی توسط نقاط دورتر انجام می‌گیرد. در واقع برای دقت مرتبه اول بیضی ماخ تنها محدود به دو سلول در طرفین وجه موردنظر است در حالی‌که در دقت مرتبه دوم این محدوده تعداد سلول‌های بیشتری را شامل می‌شود و بر این اساس، محدوده تاثیر آن افزایش می‌یابد.

4- بردارهای شار لزج و انتگرال‌گیری زمانی

برای تخمین بردارهای شار لزج در معادلات ناویر- استوکس و انرژی، نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه اول پارامترهای جریان در مرز مشترک بین دو سلول است. در این مقاله، گسسته‌سازی معمولی مرکزی برای تخمین جملات لزج در مرز مشترک دو سلول به‌کار رفته است. به‌عنوان مثال، مشتق مرتبه اول در روی وجه AB در "شکل 4" با انتگرال‌گیری روی یک شبکه ثانویه به‌صورت رابطه (22) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\emptyset}{\partial x})_{AB}&=\frac{1}{S'}\iint\frac{\partial\emptyset}{\partial x}dS=\frac{1}{S'}\oint\emptyset dy=\frac{1}{S'}\sum_{k=1}^{4}\emptyset_k\Delta y_k \\ &=\frac{1}{S'}[0.5(\emptyset_A+\emptyset_N)\Delta y_{AN} \\ &\quad+0.5(\emptyset_N+\emptyset_B)\Delta y_{NB} \\ &\quad+0.5(\emptyset_B+\emptyset_M)\Delta y_{BM}+0.5(\emptyset_M+\emptyset_A)\Delta y_{MA}] \end{aligned} \quad (22)$$

که در رابطه (22)، مقادیر $\emptyset$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\emptyset_A=\frac{1}{4}[\emptyset_{NW}+\emptyset_N+\emptyset_M+\emptyset_W]$$

جهت گسسته‌سازی زمانی از روش صریح رانگ-کوتای مرتبه چهار استفاده شده است و بیشینه مقدار گام زمانی از شرط پایداری که بر روی عدد کورانت اعمال می‌شود، محاسبه می‌گردد. عدد کورانت به‌صورت رابطه (23) تعریف می‌شود.

$$\mathrm{CFL}=\left[\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+v^2+\beta}\right]\frac{\Delta t}{\Delta l} \quad (23)$$

5- نتایج و بحث

در این بخش، دقت و سرعت همگرایی طرح پیشنهادی جدید براساس مقایسه آن با نتایج موجود مورد بررسی قرار گرفته است. طرح ارائه شده برای مدل‌سازی جریان سیال بدون انتقال گرما روی مسائل مختلف بررسی شده است [16,15]. در مقاله حاضر، طرح پیشنهادی روی دو مسئله کلاسیک مکانیک سیالات یعنی جریان داخل حفره مربعی و انتقال گرمای اجباری اطراف استوانه با مقطع دایره‌ای در حالت‌های پایا و ناپایا مورد بررسی قرار گرفته است. برای نشان دادن سرعت همگرایی طرح جدید، مقایسه تاریخچه همگرایی آن با دو روش مشخصه‌های معمولی و نیز روش میانگین‌گیری ارائه شده است و دقت طرح نیز برای اعداد رینولدز و گراشهف مختلف با نتایج تجربی و عددی موجود مقایسه شده است.

5-1- جریان داخل حفره مربعی همراه با انتقال گرما

در این بخش، جریان سیال داخل حفره مربعی همراه با انتقال گرما مورد بررسی قرار می‌گیرد که این جریان توسط صفحه بالایی که با سرعت یکنواخت در راستای خود صفحه کشیده می‌شود، به‌وجود می‌آید. شرط مرزی در دیواره‌ها، شرط عدم لغزش می‌باشد. دیوارهای جانبی حفره عایق بوده و صفحه بالایی و پایینی دارای دماهای بی‌بعد مختلف می‌باشند. برای تغییرات چگالی، تقریب بوزینسک مورد استفاده قرار گرفته است و عدد پرانتل در تمام موارد 0.71 در نظر گرفته شده است. پارامتر η با استفاده از آزمایش‌های عددی بین یک و دو انتخاب شده است و محاسبات برای اعداد رینولدز و

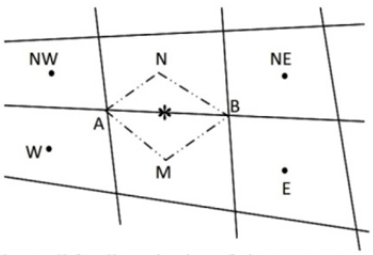


Fig. 4 Secondary cell for discretization of viscous terms

شکل 4 شبکه ثانویه برای محاسبه جملات لزج

www.SID.ir

Archive of SID

گراشهف مختلف تکرار شده است. عدد ریچاردسون، بیانگر اهمیت نیروهای شناوری نسبت به نیروهای اینرسی می‌باشد. برای اعداد ریچاردسون کوچک، نیروهای اینرسی دارای اهمیت بالایی بوده و نیروهای شناوری قابل صرف‌نظر می‌باشند در حالی‌که برای اعداد ریچاردسون بالا، نیروهای شناوری در حفره بر نیروهای اینرسی غلبه می‌نمایند. خطای ناشی از محاسبات با استفاده از رابطه (24) محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{ENORM}(\emptyset) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{IM}\sum_{j=1}^{JM}(\emptyset_{i,j}^{n+1} - \emptyset_{i,j}^{n})^2}}{\text{تعداد سلولها}} \qquad (24)$$

"شکل 5" نرخ همگرایی طرح پیشنهادی را در مقایسه با روش مشخصه-های معمولی و نیز روش میانگین‌گیری در $\mathrm{Re} = 1000$ و $\mathrm{Gr} = 100$ در یک شبکه 80× 80 نشان می‌دهد. مطابق "شکل 5"، طرح پیشنهادی جدید دارای نرخ همگرایی بسیار سریع‌تری نسبت به روش مشخصه‌های معمولی می‌باشد، این در حالی است که در روش میانگین‌گیری امکان همگرایی جواب‌ها وجود ندارد. باید به این نکته دقت شود که تمام روش‌ها در بالاترین عدد کورانت مجاز خود اجرا شده‌اند. لازم به ذکر است که بالاترین مقدار عدد کورانت برای طرح پیشنهادی جدید برابر 1.6 می‌باشد در حالی که این مقدار برای روش مشخصه‌های معمولی برابر 0.9 می‌باشد. "شکل 6" مقایسه نتایج توزیع دما داخل حفره را بین طرح محاسباتی جدید با مرجع [19] نشان می‌دهد. در حالت حدی وقتی صفحه بالایی ساکن است، سیال داخل حفره تقریباً ساکن بوده و توزیع دما به سمت پروفیل خطی میل می‌کند. این مسئله بیانگر توزیع دمای ناشی از هدایت خالص در داخل حفره می‌باشد. در صورتی که در اعداد ریچاردسون پایین، تاثیر نیروهای شناوری کاهش یافته و در قسمت میانی حفره، تغییرات دمایی ناچیز بوده و گرادیان شدید دمایی در قسمت بالایی و پایینی حفره به‌وجود می‌آید.

مقایسه نتایج پروفیل سرعت در راستای محورهای افقی و عمودی در "شکل‌های 7 و 8" نشان داده شده‌اند. نتایج ارائه شده، تغییرات مشخصه‌های جریان با افزایش عدد گراشهف را در رینولدز ثابت نشان می‌دهند. مطابق

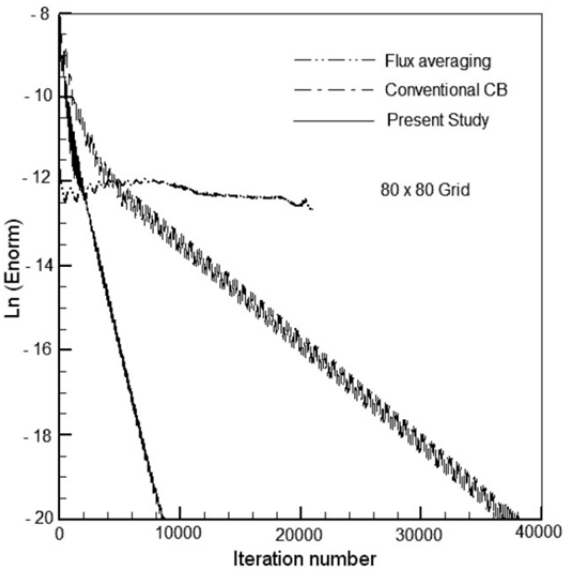


Fig. 5 Convergence history of temperature for MACB, conventional CB and flux averaging at Re = 1000 and Gr = 100

شکل 5 مقایسه نرخ همگرایی روش MACB، روش مشخصه‌های معمولی و روش میانگین‌گیری در $\mathrm{Re} = 1000$ و $\mathrm{Gr} = 100$

نتایج به‌دست آمده، در اعداد گراشهف پایین، تغییرات سرعت در کل حفره وجود دارد. با افزایش عدد گراشهف مطابق "شکل 7"، تغییرات سرعت در راستای قائم فقط در قسمت بالایی حفره اتفاق می‌افتد ولی مطابق "شکل 8"، سرعت در راستای افقی تقریباً ثابت می‌ماند. "شکل‌های 9 و 10" مقایسه عدد ناسلت در دیواره‌های بالایی و پایینی را برای اعداد رینولدز و گراشهف مختلف نشان می‌دهند. مقایسه نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش عدد گراشهف، عدد ناسلت در دیواره های بالایی و پایینی کاهش می‌یابد.

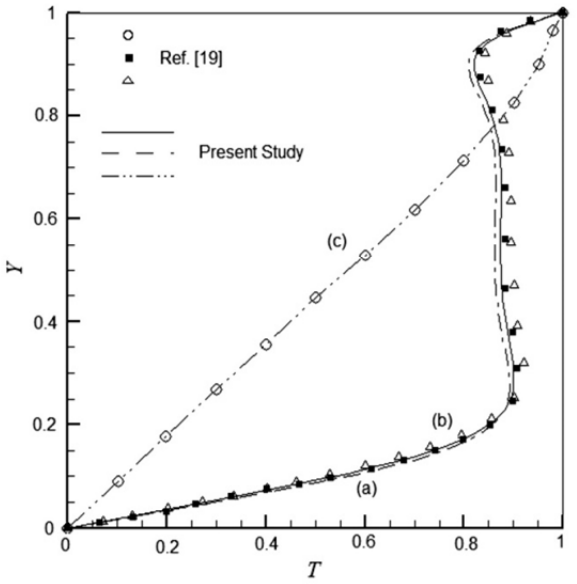


Fig. 6 Comparison of results for temperature profiles along vertical centerline at Re = 400 and (a) $\mathrm{Gr} = 10^2$, (b) $\mathrm{Gr} = 10^4$, (c) $\mathrm{Gr} = 10^6$ on 80×80 uniform grid

شکل 6 مقایسه نتایج پروفیل دما بر روی خط مرکزی قائم حفره در $\mathrm{Re} = 400$ و (a) $\mathrm{Gr} = 10^2$، (b) $\mathrm{Gr} = 10^4$ و (c) $\mathrm{Gr} = 10^6$ در یک شبکه 80×80

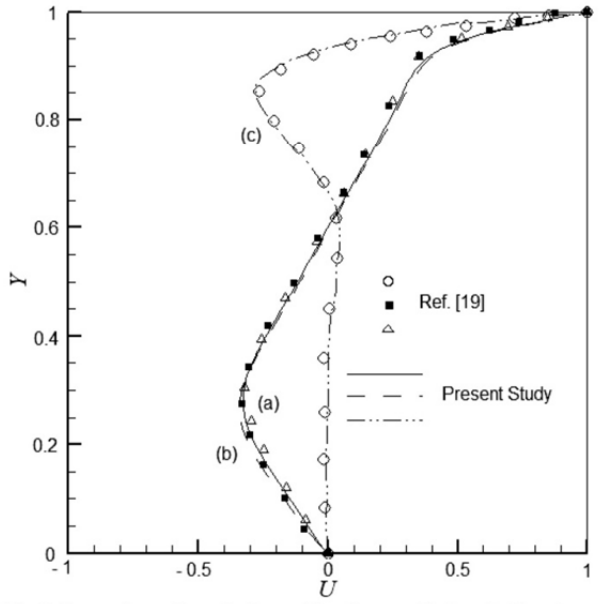


Fig. 7 Comparison of *u*-velocity profiles along vertical centerline at Re = 400 and (a) $\mathrm{Gr} = 10^2$, (b) $\mathrm{Gr} = 10^4$, (c) $\mathrm{Gr} = 10^6$ on 80×80 uniform grid

شکل 7 مقایسه نتایج پروفیل سرعت در راستای محور x روی خط مرکزی قائم در $\mathrm{Re} = 400$ و (a) $\mathrm{Gr} = 10^2$، (b) $\mathrm{Gr} = 10^4$ و (c) $\mathrm{Gr} = 10^6$ در یک شبکه 80×80

www.SID.ir

Archive of SID

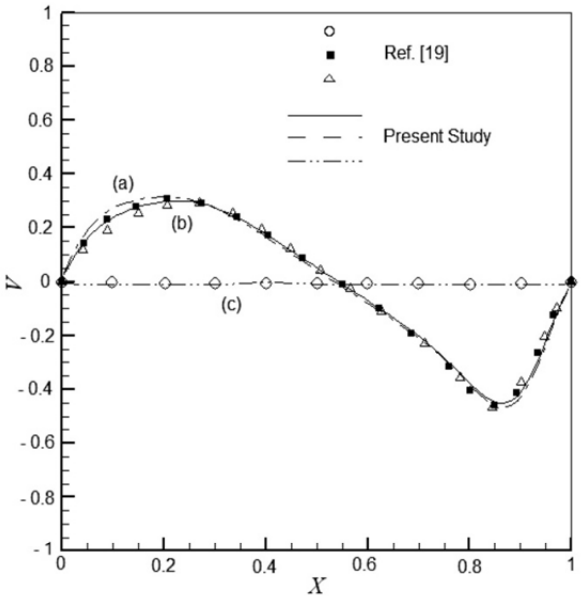


Fig. 8 Comparison of *v*-velocity profiles along horizontal centerline at Re = 400 and (a) Gr = 10^2, (b) Gr = 10^4, (c) Gr = 10^6 on 80×80 uniform grid

شکل 8 مقایسه نتایج پروفیل سرعت در راستای محور y روی خط مرکزی افقی در Re = 400 و (a) Gr = 10^2، (b) Gr = 10^4 و (c) Gr = 10^6 در یک شبکه 80×80

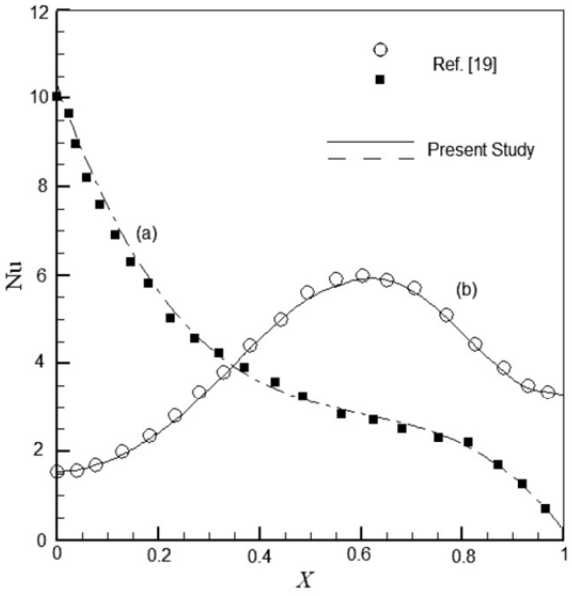


Fig. 9 Comparison of Nusselt number along (a) Top wall, (b) Bottom wall at Re = 400 and Gr = 10^2 on 80×80 uniform grid

شکل 9 مقایسه عدد ناسلت در دیواره بالایی (a) و دیواره پایینی (b) در Re = 400 و Gr = 10^2 در یک شبکه 80×80

5-2-جریان حول استوانه دایره ای

جریان صلیبی عبوری از روی یک استوانه با مقطع دایره‌ای دارای خواص ویژه‌ای می‌باشد. در اعداد رینولدز پایین لایه مرزی کاملاً چسبیده به استوانه بوده و با افزایش عدد رینولدز، جدایی لایه مرزی در بالا و پایین استوانه دیده می‌شود. برای اعداد رینولدز کمتر از 40 جریان جدا شده پایا بوده و با زمان تغییر نمی‌کند. با افزایش عدد رینولدز، ناپایداری‌هایی در جریان مشاهده شده

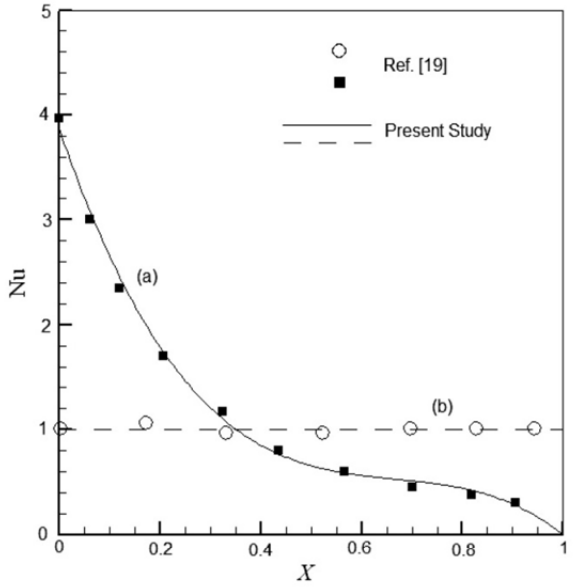


Fig. 10 Comparison of Nusselt number along (a) Top wall, (b) Bottom wall at Re = 400 and Gr = 10^6 on 80×80 uniform grid

شکل 10 مقایسه عدد ناسلت در دیواره بالایی (a) و دیواره پایینی (b) در Re = 400 و Gr = 10^6 در یک شبکه 80×80

و در اعداد رینولدز حدود 60 تا 5000 ناپایداری جریان خود را نشان می‌دهد و گردابه‌های تولید شده در طرفین استوانه به تدریج از آن جدا شده و به پایین دست انتقال می‌یابند. در این بخش به‌منظور ارزیابی توانایی طرح جدید در شبکه‌های غیرکارتزین، انتقال حرارت اجباری پایا و ناپایا حول استوانه دایره‌ای در شبکه O شکل با ریز کردن شبکه نزدیک دیواره جامد مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج حل عددی نشان می‌دهند برای اعداد رینولدز کوچکتر از 40 الگوی جریان به‌صورت پایا بوده و در رینولدزهای بالاتر، جداشدن نوسانی گردابه‌ها از پشت استوانه روی می‌دهد که نشانگر ناپایایی جریان است. شرایط مرزی اعمال شده در روی مرز جامد برای سرعت‌ها، شرط عدم لغزش و برای دما، شرط دمایی یکنواخت دیواره بوده و برای فشار از برون‌یابی مرتبه دوم از سلول‌های مجاور دیواره استفاده شده است. برای اعمال شرایط مرزی در مرزهای دور با توجه به فروصوتی بودن جریان، نیاز به تخصیص دو شرط مرزی در ورودی و یک شرط مرزی در خروجی از خارج دامنهٔ محاسباتی می‌باشد. شرایط مرزی در مرزهای دور به‌صورت یک‌بعدی محلی و براساس شرایط مرزی مشخصه‌ای اعمال شده است. ورودی یا خروجی بودن مرز سلول در هر مرحله، با استفاده از جهت بردار سرعت بررسی شده و شرط مرزی مناسب اعمال گردیده است. در سلول‌های ورودی جریان، تنها فشار از داخل دامنهٔ محاسباتی برونیابی شده و بقیه مقادیر از خارج دامنه تخصیص داده شده‌اند. در سلول‌های خروجی تنها مقدار فشار از خارج محدوده اعمال شده و سایر پارامترها از داخل درونیابی شده‌اند. مرز دور در اعداد رینولدز پایین برابر 40 برابر قطر استوانه و در اعداد رینولدز بالا برای مشاهده گردابه فون کارمن، مرز دور 80 برابر قطر قرار داده شده است. "شکل 11" مقایسه نرخ همگرایی بین طرح جدید، روش مشخصه‌های معمولی و نیز روش میانگین‌گیری را نشان می‌دهد. مطابق نتایج به‌دست آمده، طرح پیشنهادی جدید دارای سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش مشخصه‌های معمولی می‌باشد. همچنین مطابق این شکل، با استفاده از روش میانگین‌گیری، امکان همگرا شدن نتایج وجود ندارد.

www.SID.ir

Archive of SID

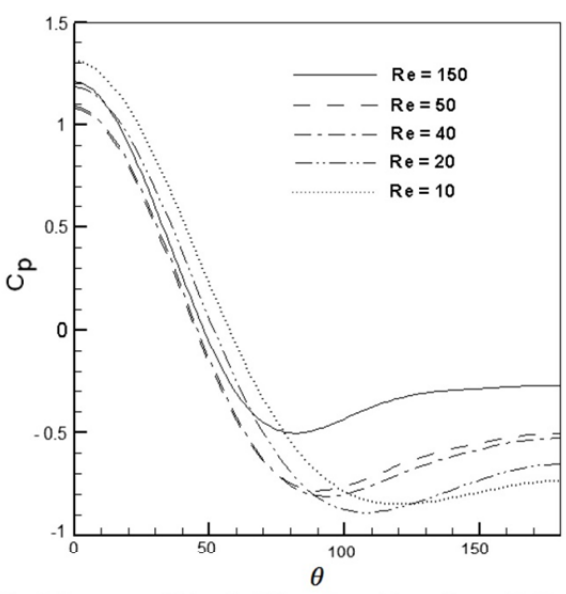
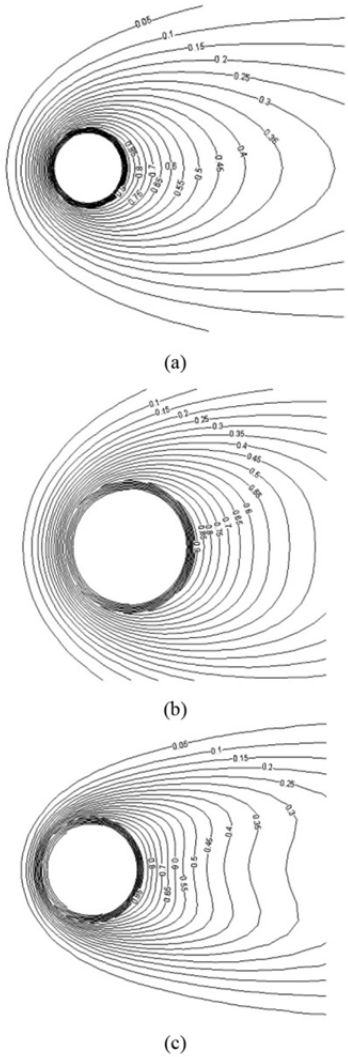


Fig. 13 Pressure coefficient for different Reynolds number on 80×80 uniform grid

شکل 13 مقایسه ضریب فشار حول استوانه برحسب زاویه در اعداد رینولدز مختلف در یک شبکه 80 ×80



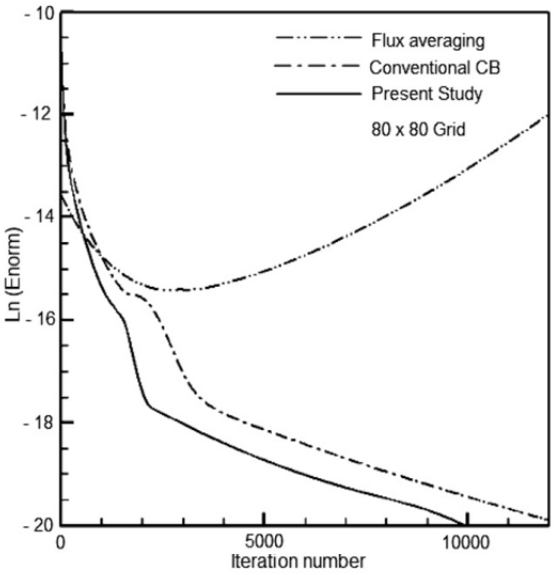


Fig. 11 Convergence history of MACB, conventional CB and flux averaging at Re = 40

شکل 11 مقایسه نرخ همگرایی روش MACB، روش مشخصه‌های معمولی و روش میانگین‌گیری در Re = 40

"شکل 12" مقایسه ضریب توزیع فشار در Re = 40 حول استوانه بین طرح محاسباتی جدید با مرجع [20] را نشان می‌دهد و توزیع ضریب فشار اطراف استوانه در رینولدزهای مختلف نیز در "شکل 13" نشان داده شده است.

"شکل 14" نتایج به‌دست آمده برای خطوط دما ثابت بی‌بعد را در اعداد رینولدز مختلف نشان می‌دهد که نشان دهنده گرادیان شدید دمایی در اطراف استوانه می‌باشد و تاثیر ناپایداری‌های جریان روی خطوط دما ثابت در اعداد رینولدز بالاتر مشاهده می‌شود.

یکی از پارامترهای اساسی برای بررسی و مقایسه نتایج جریان حول استوانه، توزیع عدد ناسلت و نیز عدد ناسلت میانگین حول استوانه در اعداد رینولدز مختلف می‌باشد. "شکل 15" مقایسه توزیع عدد ناسلت حول استوانه بین طرح محاسباتی جدید با مرجع [21] را برای Re = 50 و

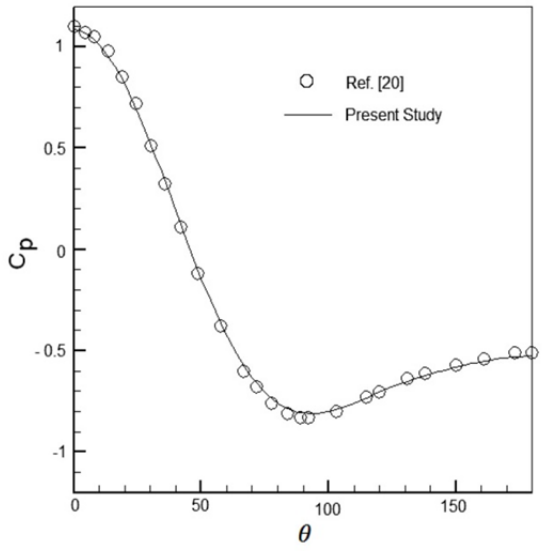
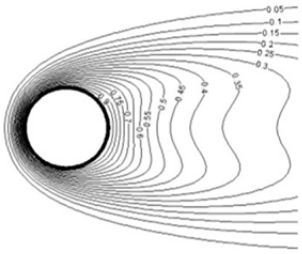


Fig. 12 Comparison of pressure coefficient at Re = 40

شکل 12 مقایسه توزیع ضریب فشار اطراف استوانه در Re = 40

www.SID.ir

Archive of SID



(d)

Fig. 14 Computed isotherms at (a) Re = 10, (b) Re = 20, (c) Re = 40 and (d) Re = 50 on 80×80 uniform grid

شکل 14 توزیع خطوط دما ثابت در (a) Re = 10، (b) Re = 20، (c) Re = 40 و (d) Re = 50 در یک شبکه 80 ×80

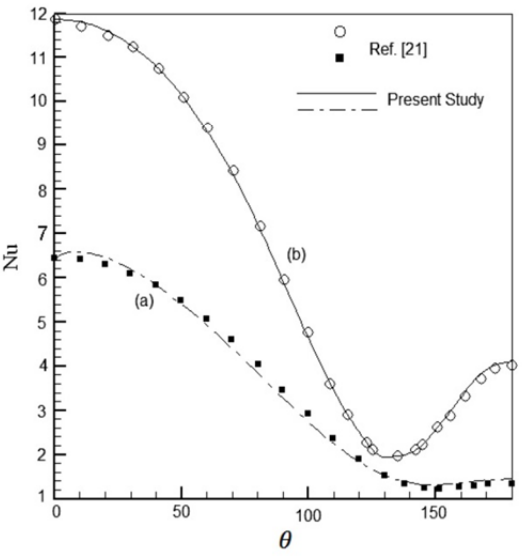


Fig. 15 Comparison of Nusselt number distribution along the cylinder surface at (a) Re = 50 and (b) Re = 150 on 80×80 uniform grid

شکل 15 مقایسه توزیع عدد ناسلت حول استوانه برحسب زاویه برای (a) Re = 50 و (b) Re = 150 در یک شبکه 80 ×80

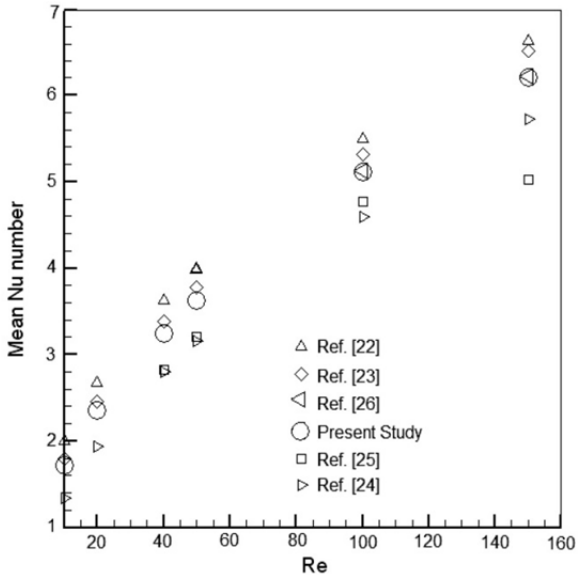


Fig. 16 Comparison of mean Nusselt number around a circular cylinder

شکل 16 مقایسه عدد ناسلت میانگین حول استوانه

Re = 150 نشان می‌دهد. مقایسه عدد ناسلت میانگین حول استوانه بین طرح محاسباتی جدید با مراجع [22-26] در "شکل 17" ارائه شده است.

از دیگر پارامترهای اساسی در بررسی جریان حول استوانه، تعیین موقعیت نقاط سکون می‌باشد. در "شکل 17" تعریف طول باز چرخش در پشت استوانه ارائه شده است. این طول در جریان‌های پایا، برابر طولی است که دو گردابه پایینی و بالایی به هم می‌رسند. به عبارت دیگر، طول بازچرخش برابر فاصله بین دو نقطه سکون در پایین دست استوانه می‌باشد. "شکل 18" مقایسه بین نتایج سرعت افقی برحسب x در پشت استوانه را بین طرح پیشنهادی جدید با مراجع [28,27] نشان می‌دهد. مطابق این شکل، طول بازچرخش برابر طولی است که در آن نقطه سرعت افقی به صورت لحظه‌ای به صفر می‌رسد.

در "شکل 19" خطوط جریان حول استوانه در اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده‌اند. مطابق نتایج به‌دست آمده، در اعداد رینولدز زیر 40 جریان دارای ماهیت پایا می‌باشد. در عدد رینولدز برابر 10، خطوط جریان به موازات یکدیگر می‌باشند ولی در Re = 20 زوج گردابه در پشت استوانه تشکیل می‌شود و با افزایش رینولدز این گردابه‌ها بزرگتر می‌شوند. با افزایش عدد رینولدز، ماهیت پایای جریان دچار تغییر شده و در Re = 150، جریان ناپایا می‌باشد که خطوط جریان برای این حالت در زمان‌های مختلف از شماره 1 تا 6 در "شکل 20" نشان داده شده‌اند. مطابق "شکل 20"، گردابه‌ها به صورت تناوبی در پشت استوانه تشکیل شده و با جدا شدن از استوانه و حرکت به سمت پایین دست جریان، خیابان گردابی فون کارمن را تشکیل می‌دهند.

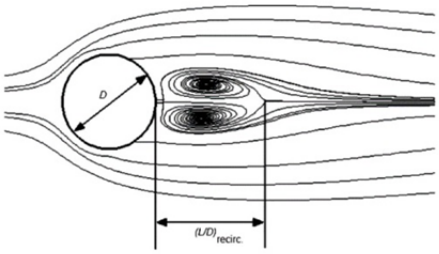


Fig. 17 Recirculation length definition

شکل 17 تعریف طول بازچرخش بدون بعد در پشت استوانه

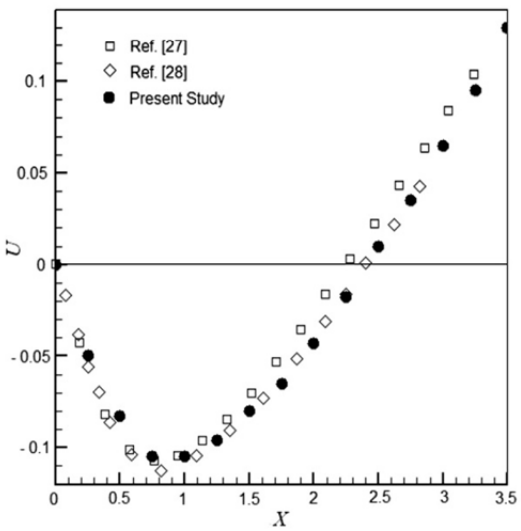


Fig. 18 Comparison of u-velocity at Re = 40 on 80×80 uniform grid

شکل 18 مقایسه نتایج سرعت u بر حسب x در پشت استوانه در Re = 40 در یک شبکه80 ×80

www.SID.ir

Archive of SID

همچنین خطوط هم‌دمای لحظه‌ای در Re = 150 در "شکل 21" ارائه شده است که بیانگر ماهیت ناپایای جریان می باشد.

6-جمع‌بندی

در این مقاله، یک روش بالادست چند بعدی جدید براساس مشخصه‌های جریان برای حل معادلات ناویر- استوکس جریان تراکم‌ناپذیر به همراه معادله انرژی ارائه شده است. روش جدید ارائه شده در این مقاله، براساس گسسته‌سازی حجم محدود مرکز سلول می‌باشد و روابط استخراج شده برای مشخصه‌های دوبعدی، برای تخمین بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار گرفته است. بردارهای شار لزج توسط یک طرح میانگین‌گیری مرتبه دوم معمولی محاسبه شده‌اند و از گسسته‌سازی زمانی صریح به صورت طرح رانگ-کوتای مرتبه چهار برای پیشروی در زمان استفاده شده است. روش جدید برای تحلیل دو جریان تراکم‌ناپذیر داخل حفره مربعی و جریان اطراف استوانه دایره‌ای در حالت پایا و ناپایا مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج به دست آمده با نتایج روش مشخصه‌ها و نیز روش میانگین‌گیری مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. مطابق نتایج به‌دست آمده، طرح پیشنهادی جدید، نتایج دقیق‌تری را نسبت به سایر طرح‌های مورد مطالعه ارائه می‌دهد. همچنین، مقایسه دقت جواب‌های به‌دست آمده در شبکه‌های یکسان، نشان دهنده همگرایی سریع‌تر طرح جدید نسبت به سایر روش‌های مورد بررسی می‌باشد. مزیت دیگر طرح جدید نسبت به سایر روش‌های مورد مطالعه، بالا بودن محدوده عدد کورانت مجاز در هنگام استفاده از طرح جدید می‌باشد که بیانگر پایداری بالای آن می‌باشد، این در حالی است که سایر روش‌ها دارای عدد کورانت پایین‌تری نسبت به طرح جدید می‌باشند. به‌منظور ارزیابی توانایی طرح جدید در شبکه‌های غیرکارتزین، جریان تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایا حول استوانه دایره‌ای همراه با انتقال گرما نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. در اعداد رینولدز بالاتر در جریان اطراف استوانه، طرح جدید به خوبی قادر به تسخیر پدیده جدا شدن تناوبی گردابه‌ها از پشت استوانه و تشکیل خیابان گردابی فون کارمن می‌باشد. دقت بالا و همگرایی سریع‌تر این روش نسبت به روش مشخصه‌های معمولی در تمام تحلیل‌های انجام شده مشهود است. در جریان اطراف استوانه، روش میانگین‌گیری مرکزی در اعداد رینولدز بالا و برخی شبکه‌ها، شدیداً ناپایدار می‌باشد، در حالی که در طرح جدید حتی در اعداد رینولدز خیلی بالا و هرگونه شبکه‌بندی نیاز به افزودن هیچ جمله پایدارسازی به معادلات نمی‌باشد. دلیل این امر نیز ماهیت بالادستی ذاتی طرح جدید و عدم استفاده از فرض‌های ساده کننده یک‌بعدی می‌باشد. با توجه به موارد بررسی شده، طرح پیشنهادی جدید به‌دلیل دارا بودن سرعت همگرایی بالا، هزینه محاسباتی کمتر و دقت بالای جواب‌ها جهت تحلیل جریان سیال تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما پیشنهاد می‌گردد.

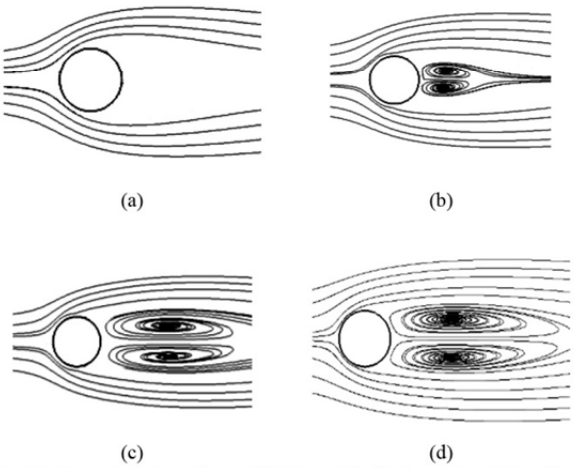


Fig. 19 Computed streamlines at (a) Re = 10, (b) Re = 20, (c) Re = 40 and (d) Re = 50 on 80×80 uniform grid

شکل 19 خطوط جریان در (a) Re = 10، (b) Re = 20، (c) Re = 40 و (d) Re = 50 در یک شبکه 80 ×80

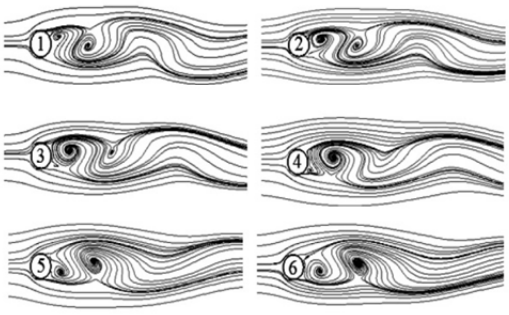


Fig. 20 Transient streamlines for Re = 150 at different times

شکل 20 خطوط جریان ناپایا حول استوانه در Re = 150



Fig. 21 Instantaneous temperature contour at Re = 150

شکل 21 خطوط دما ثابت لحظه‌ای حول استوانه در Re = 150

7- فهرست علایم

CFL	عدد کورانت
C_p	ضریب فشار
$f(x,y,t)$	سطح مشخصه
Fr	عدد فرود
$\vec{F}_c$	بردار شار جابجایی
$\vec{F}_v$	بردار شار لزج
Gr	عدد گراشهف
m	گام زمانی
n	جهت عمود بر سطح
Nu	عدد ناسلت
$\hat{n}$	بردار عمود بر سطح مشخصه
n_t	مولفه مماسی بردار عمود بر سطح
p	فشار (Pa)
Pr	عدد پرانتل
$\vec{q}$	شار حرارتی (Wm^{-2})
R	ترم چشمه در معادلات ناویر- استوکس
Re	عدد رینولدز
Ri	عدد ریچاردسون
S	مساحت سطح (m^2)

www.SID.ir

Archive of SID

S'	مساحت سلول (m^2)
t	جهت مماسی
T	دما (K)
u	مولفه افقی سرعت (ms^{-1})
$\vec{U}$	بردار سرعت (ms^{-1})
v	مولفه عمودی سرعت (ms^{-1})
$\hat{V}$	بردار سرعت مجازی (ms^{-1})
W	بردار متغیرهای وابسته

علایم یونانی

β	تراکم‌پذیری مصنوعی
β_{ex}	ضریب انبساط حجمی (K^{-1})
$\emptyset$	نام‌گذاری عمومی برای متغیرهای جریان
φ	زاویه موج (rad^{-1})
η	ضریب پیوند
θ	محورهای مماسی حول استوانه (rad)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
τ_{ij}	تنش‌های لزجی (Nm^{-2})

بالانویس‌ها

*	کمیت‌های بی‌بعد

8- مراجع

[1] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of Computational Physics,* Vol. 2, No. 1, pp. 12– 26, 1967.

[2] D. Kwak, C. Kiris, C. S. Kim, Computational challenges of viscous incompressible flows, *Computers & Fluids,* Vol. 34, No.3, pp. 283–299, 2005.

[3] D. Drikakis, P. A. Govatsos, D. E. Papantonis, A characteristic based method for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. 19, No. 8, pp. 667-685, 1994.

[4] Y. Zhao, B. Zhang, A high-order characteristics upwind FV method for incompressible flow and heat transfer simulation on unstructured grids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 190, No 5-7, pp. 733-756, 2000.

[5] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu, *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*, Seventh Edition, pp. 87–125, Butterworth-Heinemann, 2014.

[6] P. Nithiarasu, C. B. Liu, An artificial compressibility based characteristic based split (CBS) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 195, No. 23-24, pp. 2961-2982, 2006.

[7] X. Su, Y. Zhao, X. Huang, On the characteristics-based ACM for incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, N0. 1, pp. 1-11, 2007.

[8] L. Zhu, P. Wang, Z. Guo, Performance evaluation of the general characteristics based off-lattice Boltzmann scheme and DUGKS for low speed continuum flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 333, pp. 227–246, 2017.

[9] Y. Bao, D. Zhou, Y. J. Zhao, A two-step Taylor-characteristic-based Galerkin method for incompressible flows and its application to flow over triangular cylinder with different incidence angles, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 62, No. 11, pp. 1181-1208, 2010.

[10] Y. Guo, R. Liu, Characteristic-based finite volume scheme for 1D Euler equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* Vol. 30, No. 3, pp. 303-312, 2009.

[11] E. Shapiro, D. Drikakis, Non-conservative and conservative formulations of characteristics-based numerical reconstructions for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 66, No. 9, pp. 1466-1482, 2006.

[12] K. Hejranfar, R. Kamali Moghadam, Preconditioned characteristic boundary conditions for solution of the preconditioned Euler equations at low Mach number flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 12, pp. 4384-4402, 2012.

[13] K. Hejranfar, K. Parseh, Preconditioned characteristic boundary conditions based on artificial compressibility method for solution of incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 345, 2017.

[14] N. Massarotti, F. Arpino, R. W. Lewis, P. Nithiarasu, Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 66, No. 10, pp. 1618-1640, 2006.

[15] S. E. Razavi, K. Zamzamian, A. Farzadi, Genuinely multidimensional characteristic-basead scheme for incompressible flows, *International Journal of Numerical Methods in Fluids,* Vol. 57, No. 8, pp. 929-949, 2008.

[16] K. Zamzamian, S.E. Razavi, Multidimensional upwinding for incompressible flows based on characteristics, *Journal of Computational Physics,* Vol. 227, No. 19, pp. 8699-8713, 2008.

[17] S. E. Razavi, *Far Field Boundary Conditions for Computation of Compressible Aerodynamic Flows,* Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill university, Montreal, Canada, 1995.

[18] M. J. Zacrow, J. D. Hoffman, *Gas Dynamics,* Vol. II, John Wiley and Sons, 1976.

[19] R. Iwatsu, J. M. Hyun, K. Kuwahara, Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient, *International Journal of Heat Mass Transfer,* Vol. 36, No. 6, pp. 1601-1608, 1993.

[20] J. Choi, R. C. Oberoi, J. R. Edwards, J. A. Rosati, An immersed boundary method for complex incompressible flows, *Journal of Computational Physics,* Vol. 224, No. 2, pp. 757–784, 2007.

[21] L. Baranyi, Computation of unsteady momentum and heat transfer from a fixed circular cylinder in laminar flow, *Journal of Computational and Applied Mechanics,* Vol. 4, No. 1, pp. 13-25, 2003.

[22]H. A. Karamers, Heat transfer from spheres to following media, *Physica,* Vol. 12, No. 2-3, pp. 61-80, 1946.

[23] R. M. Fand, Heat transfer by forced convection from a cylinder to water in crossflow, *International Journal of Heat Mass Transfer,* Vol. 8, No. 7, pp. 955-1010, 1965.

[24] S. Whitaker, Forced convection heat transfer calculations for flow in pipes, past flat plate, single cylinder, and for flow in packed beds and tube bundles, *American Institute of Chemical Engineers Journal,* Vol. 18, No. 2, pp. 361-371, 1972.

[25] H. C. Perkins, G. Leppert, Local heat-transfer coefficients on a uniformly heated cylinder, *International Journal of Heat Mass Transfer,* Vol. 7, No. 2, pp. 143-158, 1964.

[26] S. W. Churchill, M. Bernstein, A correlating equation for forced convection from gases and liquids to a circular cylinder in cross flow, *Journal of Heat Transfer,* Vol. 99, No. 2, pp. 300-306, 1977.

[27] T. W. H. Sheu, H. F. Ting, R. K. Lin, An immersed boundary method for the incompressible Navier–Stokes equations in complex geometry, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 56, No. 7, pp. 877–898, 2008.

[28] A. L. F. L. Silva, A. Silverira-Neto, J. J. R. Damasceno, Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, *Journal of Computational Physics,* Vol. 189, No. 2, pp. 351–370, 2003.

www.SID.ir