

## مدل سازی جابجایی ترکیبی با استفاده از مشخصه های چند بعدی

علیرضا رستمزاده خسروشاهی<sup>1</sup>، سید اسماعیل رضوی<sup>2\*</sup>، سید مهدی میرساجدی<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

\* تبریز، صندوق پستی 5166616471، razavi@tabrizu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله یک روش جدید بر مبنای روش مشخصه های چند بعدی برای حل معادلات ناویر-استوکس و انرژی در جریان های تراکم ناپذیر پایا ارائه شده است. روش های قبلی بر پایه مشخصه ها در جریان های تراکم ناپذیر، فرض یک بعدی بودن موضعی جریان را به کار برده اند و در مراجع به خطای ناشی از این ساده سازی اشاره شده است. در تحقیق حاضر، از روش مشخصه های چند بعدی مصنوعی برای یافتن مسیر انتشار اطلاعات استفاده شده است. معادلات سازگاری و متغیرهای ریمین تعمیم یافته برای معادلات ناویر-استوکس و انرژی استخراج شده و از این معادلات برای یافتن شار جابجایی در مرز سلول ها استفاده شده است. برای آزمون دقت و سرعت طرح ارائه شده، جریان سیال تراکم ناپذیر پایا در داخل حفره مربعی و جریان اطراف استوانه دایره ای همراه با انتقال گرما برای دامنه وسیعی از اعداد رینولدز و گراشهف حل شده است. همچنین جهت مقایسه، روش مشخصه ها به همراه میانگین گیری برای معادله انرژی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده بیانگر همگرایی سریعتر روش جدید نسبت به روش مشخصه های معمولی و میانگین گیری می باشد. در اعداد ریچاردسون بالا، روش میانگین گیری همگرا نمی شود ولی روش ارائه شده در این مقاله، دارای سرعت همگرایی بالایی می باشد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 14 آبان 1396  
 پذیرش: 18 اسفند 1396  
 ارائه در سایت: 24 فروردین 1397

کلید واژگان:

مشخصه های چند بعدی  
 تراکم پذیری مصنوعی  
 معادلات ناویر-استوکس  
 جابجایی ترکیبی

## Multidimensional Characteristic Modeling of Combined Convection Flows

Alireza Rostamzadeh Khosroshahi<sup>1</sup>, Seyed Esmail Razavi<sup>2\*</sup>, Seyed Mahdi Mirsajedi<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

2- School of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

3- Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 5166616471, Tabriz, Iran, razavi@tabrizu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 05 November 2017  
 Accepted 09 March 2018  
 Available Online 13 April 2018

### Keywords:

Multidimensional characteristic  
 Artificial compressibility  
 Navier-Stokes equations  
 Combined Convection

### ABSTRACT

Present study proposes a new multidimensional artificially characteristic-based (MACB) scheme for simulation of combined convection flows. Multidimensional characteristic structure for energy propagation in incompressible flow is derived for the first time. Four pseudo-waves are selected and equations are discretized along them to observe the physical behavior of domain. Viscous fluxes are computed by variables derivatives at the cell interfaces and for time discretization, a 4th-order Runge-Kutta method was used. According to the new scheme, two-dimensional flow with heat transfer in a square cavity and forced convection around a circular cylinder are solved for a wide range of Reynolds and Grashof numbers. Also, for comparison purposes, the CB scheme with averaging for energy equation is used. It was found that MACB has remarkable faster convergence in comparison with CB scheme and averaging methods. Also, by using MACB scheme, maximum permissible CFL number can be increased 80 percent in comparison to CB scheme. At higher Richardson numbers, the conventional flux averaging was failed to converge properly while MACB scheme presents the most rapid convergence. The computed results of MACB scheme are in good agreement with the benchmark solutions.

وی برای مرتبط ساختن معادلات مومنتوم و پیوستگی به یکدیگر و هذلولوی کردن دستگاه معادلات حاکم و امکان استفاده از روش زمانروی، مفهوم جدیدی به نام تراکم پذیری مصنوعی را ابداع کرد که با این روش، معادلات ناویر-استوکس از ماهیت بیضوی-سه موی به ماهیت سهموی-هذلولوی تبدیل می شوند. روش های تجزیه اختلاف شار از نوع گودونف<sup>1</sup> با حلگرهای ریمین مختلف از جمله روش رو<sup>2</sup> جهت محاسبه بردارهای شار جابجایی در

### 1- مقدمه

حل جریان های سیال تراکم ناپذیر توسط روش های مختلف عددی، طی سال های متمادی مورد توجه محققان بوده و روش های عددی مختلفی برای حل آن ها ارائه شده است. مشکل اساسی در حل این جریان ها، نحوه یافتن ارتباط بین میدان سرعت و فشار و در نهایت ارضای معادله پیوستگی می باشد. روش تراکم پذیری مصنوعی برای اولین بار توسط کورین در سال 1967 برای حل پایای معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر ابداع شد [1].

<sup>1</sup> Godunov

<sup>2</sup> Roe

روش حجم محدود، به طور وسیعی به کار رفته‌اند [2]. دریکاکیس و همکاران [3]، روش جدیدی با عنوان روش مشخصه‌ها، بر مبنای مشخصه‌های یک‌بعدی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر دوبعدی در یک مختصات منحنی‌الخط و شبکه با سازمان آرایه دادند. ژائو و همکاران [4] روش ارائه شده توسط دریکاکیس را به یک روش بالادست مرتبه بالا بر اساس مشخصه‌های یک‌بعدی محلی در مرز بین دو سلول برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما در شبکه‌های دوبعدی و سه‌بعدی بی‌سازمان گسترش دادند. زینکوویچ و همکاران، روش مشخصه‌ها را برای جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر در حالت‌های صریح و نیمه‌ضمنی فرمول‌بندی نمودند و مشخصه‌های مهم این روش، شامل پایداری و دقت طرح را در جریان‌های مختلف مورد ارزیابی قرار دادند [5]. نیتیارسو و همکاران، با معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی و روش المان محدود، جریان‌های آشفته تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایا را بر اساس جداسازی معادلات و گسسته‌سازی به روش مشخصه‌ها، حل کردند [6]. سو و همکاران، روش مشخصه‌های اصلی و بازنگری شده را با هم مقایسه نمودند. آن‌ها هر دو روش را روی جریان لزج سیال اطراف استوانه اعمال نموده و نتیجه‌گیری نمودند که هر دو روش دارای سرعت همگرایی و دقت بالایی می‌باشند ولی، روش مشخصه‌های اصلی به دلیل سادگی کاربرد آن نسبت به روش بازنگری شده دارای مزیت می‌باشد [7]. ژو و همکاران، مقایسه بین روش مشخصه‌ها برای شبکه لتیس- بولتزمن<sup>۲</sup> و طرحی بر اساس سینماتیک گازها را برای جریان‌های سرعت پایین ارائه نمودند. آن‌ها طرح‌های خود را روی سه جریان مختلف اعمال نمودند و نتایج به‌دست آمده نشان داد که در اندازه شبکه یکسان، طرح بر مبنای سینماتیک گازها دارای دقت بالاتری است ولی هزینه محاسباتی آن دو برابر بیشتر از روش مشخصه‌ها می‌باشد [8]. بیشتر طرح‌های محاسباتی موجود برای تخمین بردارهای شار جابجایی در مرز بین دو سلول در حالت‌های دو و سه بعدی، بر اساس فرض جریان به صورت یک بعدی موضعی و در جهت عمود بر مرز سلول است. فرض انجام شده بر این اساس است که تغییرات در مقادیر متغیرها در مرز سلول‌ها تنها تحت تاثیر بردارهای شار عمود بر آن قرار داشته و بردارهای شار موازی با مرز، هیچ‌گونه دخالتی در تغییرات متغیرها روی مرز بین دو سلول ندارند. این فرض باعث صرفنظر کردن از فیزیک واقعی مساله شده و سبب ایجاد وابستگی غیرفیزیکی حل عددی به شبکه می‌شود که مطلوب نیست. به همین دلیل، تلاش برای ارائه طرح‌های محاسباتی بالادست در حالت‌های چند بعدی همواره مورد توجه محققان دینامیک سیالات محاسباتی بوده است. به دلیل مشخص نبودن دقیق ساختار مشخصه‌های معادلات چند بعدی اوپلر و در دست نبودن جهت‌های غالب برای انتخاب متغیرهای بالادست، روش‌های مبتنی بر مشخصه‌های چند بعدی تا به امروز نیز مورد بحث و بررسی قرار دارند. برخلاف حالت یک بعدی، در حالت دوبعدی بی‌نهایت مسیر برای انتقال اطلاعات موجود است و انتخاب مسیرهای غالب برای انتشار امواج در داخل میدان جریان سیال، جزو مسائل مورد بحث می‌باشد. بانو و همکاران، الگوریتمی بر اساس بسط سری تیلور در راستای مشخصه‌های معادله مومنوم ارائه دادند. آن‌ها با حل معادله پواسون برای فشار، میدان فشار را مستقل از میدان سرعت به‌دست آوردند و نتایج خود را با روش مشخصه‌های کلاسیک مقایسه نمودند. با اعمال طرح پیشنهادی خود روی جریان سیال با شبکه‌بندی‌های مختلف، آن‌ها دقت عددی بالایی را نسبت به روش مشخصه‌های کلاسیک گزارش نمودند [9].

## 2- فرمول بندی ریاضی مشخصه‌های چند بعدی

معادلات ناویر- استوکس و انرژی برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر در حالت دوبعدی به صورت معادلات (1) می‌باشند [4]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}_c = \nabla \cdot \vec{F}_v + S$$

$$W = \begin{bmatrix} p \\ \vec{U} \\ T \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_c = \begin{bmatrix} \beta^2 \vec{U} \\ \vec{U}\vec{U} + \frac{p}{\rho} \delta_{ij} \\ T\vec{U} \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \vec{q} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{ex} \Delta T^* \times T / Fr \\ \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

تانسور تنش‌های لزج و شار گرمایی مطابق رابطه (2) می‌باشند.

$$\tau_{ij} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \vec{q} = \frac{1}{Re Pr} \nabla T \quad (2)$$

برای بی‌بعدسازی معادلات (1) از پارامترهای زیر استفاده می‌شود:

$$(x, y) = \left( \frac{x^*}{l^*}, \frac{y^*}{l^*} \right), \quad t = \frac{t^*}{l^* / U_{\infty}^*}, \quad (u, v) = \left( \frac{u^*}{U_{\infty}^*}, \frac{v^*}{U_{\infty}^*} \right)$$

$$p = \frac{p^* - p_{\infty}^*}{\rho_{\infty} (U_{\infty}^*)^2}, \quad T = \frac{T^* - T_{ref}^*}{T_{\infty}^* - T_{ref}^*} \quad (3)$$

در این قسمت، ساختار مشخصه‌های دوبعدی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی به همراه انتقال گرما استخراج شده است. تعمیم به حالت سه‌بعدی عیناً مشابه دوبعدی است. برای به‌دست آوردن ساختار مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی، ابتدا معادلات اوپلر متناظر مورد بررسی قرار می‌گیرد [3]. جملات لزج به صورت جملات چشمه در معادلات وارد شده و تاثیری بر روی ساختار مشخصه‌های معادلات ندارند. معادلات اوپلر متناظر با معادلات

<sup>1</sup> Characteristics-based (CB)

<sup>2</sup> Lattice Boltzmann

ماخ گذرنده از آن نقطه مماس است. سطوح مشخصه در امتداد زوج خطوط مشخصه بر مخروط ماخ گذرنده از آن نقطه مماس می باشد که در واقع مسیرهای انتشار اطلاعات از نقطه فرضی M به زمان بعدی می باشد. جهت یافتن مسیرهای انتشار امواج در روی یک کنج ماخ داریم:

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow n_t + \frac{dx}{dt} \cos \varphi + \frac{dy}{dt} \sin \varphi = 0 \quad (12)$$

با مقایسه معادلات (10) و (12) داریم:

$$\begin{cases} n_t + \frac{dx}{dt} \cos \varphi + \frac{dy}{dt} \sin \varphi = 0 \\ n_t + u \cos \varphi + v \sin \varphi = \frac{\beta}{n_t} \end{cases} \quad (13)$$

با کسر دو رابطه از یکدیگر می توان نوشت:

$$\left(u - \frac{dx}{dt}\right) \cos \varphi + \left(v - \frac{dy}{dt}\right) \sin \varphi = \frac{\beta}{n_t} \quad (14)$$

در نتیجه معادلات مسیرهای انتشار امواج به صورت روابط (15) خواهند بود:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u - \frac{\beta}{n_t} \cos \varphi \\ \frac{dy}{dt} = v - \frac{\beta}{n_t} \sin \varphi \end{cases} \quad (15)$$

برخلاف حالت معادلات اولر دوبعدی، در این جا سطح مقطع کنج ماخ با صفحه  $\eta$  یک بیضی است که محورهای آن موازی محورهای مختصات هستند. برای به دست آوردن معادلات حاکم در روی مسیرهای مشخصه، با جاگذاری  $\psi$  در معادلات مومنوم در دستگاه معادلات (5) داریم:

$$\begin{cases} \frac{\beta}{n_t} du + \cos \varphi dp = 0 \\ \frac{\beta}{n_t} dv + \sin \varphi dp = 0 \\ \frac{\beta \eta}{n_t^2} dT + dp = 0 \end{cases} \quad (16)$$

با انتگرال گیری از روابط (16) در طول مسیرهای مشخصه، متغیرهای ریمن تعمیم یافته مطابق روابط (17) به دست می آیند.

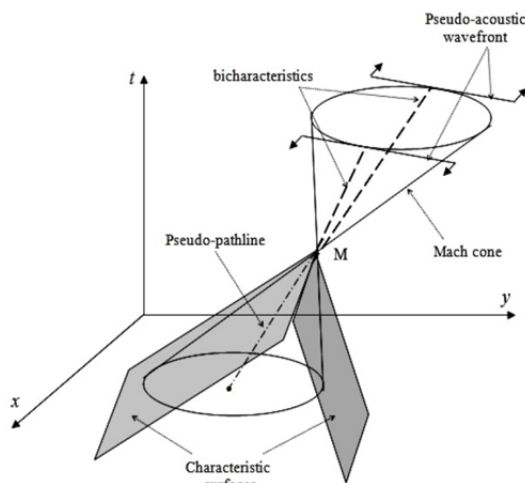


Fig. 1 Characteristic surfaces, pseudo-acoustic wave front, pseudo-pathline, Mach cone and bicharacteristics

شکل 1 سطوح مشخصه، سطوح موج، خط جریان مجازی، مخروط ماخ و مسیرهای دوگانه مشخصه

تراکم پذیری مصنوعی دوبعدی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

در معادلات (4)،  $\eta$  ضریب پیوند معادله انرژی به دیگر معادلات می باشد. لازم به توضیح است که دامنه محدودی داشته و توسط آزمایش های عددی مقدار بهینه آن انتخاب می شود. در این مقاله، فشار به عنوان متغیر اصلی انتخاب شده است و دلیل این امر نیز وجود مشتقات فشار به طور صریح در معادلات مومنوم می باشد. جهت یافتن ساختار مشخصه های معادلات، سطح مشخصه ای به شکل  $f(x, y, t)$  فرض می شود. با استفاده از روابط سینماتیک، می توان بین مشتقات جزئی و مشتقات کامل در روی سطح  $f$  ارتباط برقرار کرد. با استفاده از معادلات (4)، مشابه با عملیات انجام شده برای سیال تراکم پذیری در مرجع [17] داریم

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} f_t dp + f_x du + f_y dv + 0 dT = 0 \\ f_x dp + \psi du + 0 dv + 0 dT = 0 \\ f_y dp + 0 du + \psi dv + 0 dT = 0 \\ \frac{1}{\eta} f_t dp + 0 du + 0 dv + \psi dT = 0 \end{cases} \quad (5)$$

در روابط (5) زیرنویس ها نشانگر مشتقات پاره ای هستند و داریم:

$$\psi = f_t + u f_x + v f_y \quad (6)$$

برای سازگاری دستگاه معادلات (5)، باید دترمینان ضرایب دستگاه برابر با صفر شود که از آن جا روابط (7) به صورت زیر نتیجه می شوند:

$$\psi = 0, \quad \psi = \frac{\beta}{f_t} (f_x^2 + f_y^2) \quad (7)$$

طبق معمول معادلات اولر، بردار سرعت مجازی به صورت  $\vec{V} = (u, v, 1)$  و بردار عمود بر سطح مشخصه به صورت  $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, n_t)$  در نظر گرفته می شود [18]. با در نظر گرفتن بردار عمود متناظر و مقایسه آن با بردار عمود بر سطح داریم:

$$\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{f_t}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = n_t \quad (8)$$

در صورتی که روابط (7)، بر حسب بردار عمود بر سطح مشخصه و بردار سرعت مجازی نوشته شوند، روابط (9) حاصل خواهند شد.

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{\beta}{n_t} \quad (9)$$

در روابط (9)،  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  بیانگر خطوط جریان مجازی سیال می باشد و از رابطه دوم داریم:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = u \cos \varphi + v \sin \varphi + n_t = \frac{\beta}{n_t} \quad (10)$$

با حل معادله (10) داریم:

$$n_t = \frac{1}{2} [- (u \cos \varphi + v \sin \varphi) \pm \sqrt{(u \cos \varphi + v \sin \varphi)^2 + 4\beta}] = n_1, n_2 \quad (11)$$

می توان ثابت کرد که در رابطه (11)، یکی از ریشه های معادله همواره منفی و دیگری همواره مثبت است که این مساله بیانگر ساختار دوگانه صفحات مشخصه است. مطابق "شکل 1"، کنج ماخ در هر نقطه بر مخروط

اکوستیک  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  در نظر گرفته شده است. برای انتخاب دو موج دیگر، محل تقاطع بیضی ماخ با ضلع مشترک بین دو سلول  $i,j+1$  و  $i+1,j$  به عنوان موج  $\varphi_3$  و محل تقاطع آن با ضلع مشترک بین دو سلول  $i,j-1$  و  $i+1,j-1$  در نظر گرفته شده است.

شش رابطه سازگاری متناظر با موج های  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  عبارتند از:

$$\begin{cases} \frac{\beta}{n_{t1}} du + \cos \varphi_1 dp = 0 \\ \frac{\beta}{n_{t1}} dv + \sin \varphi_1 dp = 0 \\ \frac{\beta \eta}{n_{t1}^2} dT + dp = 0 \\ \frac{\beta}{n_{t2}} du + \cos \varphi_2 dp = 0 \\ \frac{\beta}{n_{t2}} dv + \sin \varphi_2 dp = 0 \\ \frac{\beta \eta}{n_{t2}^2} dT + dp = 0 \end{cases} \quad (18)$$

مشابه روابط (18)، می توان برای موج های  $\varphi_3$  و  $\varphi_4$  نیز شش رابطه سازگاری نوشت. با گسسته سازی معادلات (18) در طول خطوط مشخصه متناظر داریم:

$$\begin{cases} p^* - p_1 + A(u^* - u_1) = 0 \\ p^* - p_1 + B(v^* - v_1) = 0 \\ p^* - p_1 + C(T^* - T_1) = 0 \\ p^* - p_2 + D(u^* - u_2) = 0 \\ p^* - p_2 + E(v^* - v_2) = 0 \\ p^* - p_2 + F(T^* - T_2) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

در معادلات (19) مقادیر  $A, B, C, D, E, F$  به صورت معادلات (20) و (21) می باشد.

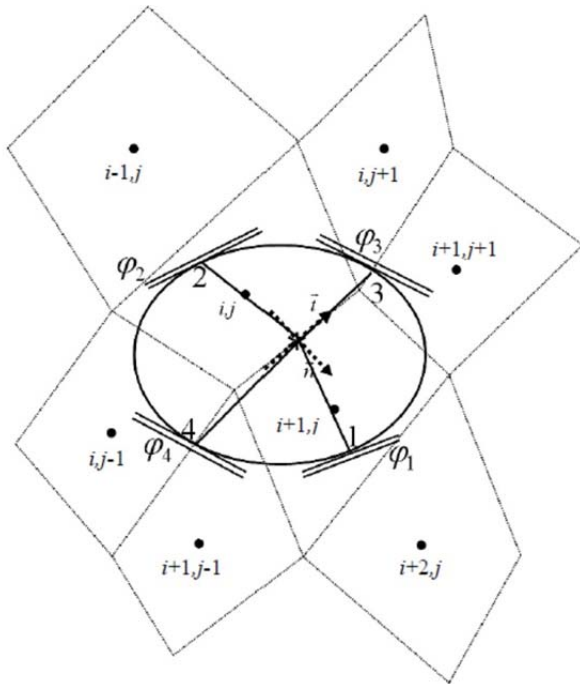


Fig. 3 Proposed stencil for evaluating convective fluxes  
شکل 3 طرح محاسباتی پیشنهادی برای محاسبه جملات جابجایی در مرز مشترک دو سلول

$$\begin{cases} R = u + \frac{n_t \cos \varphi}{\beta} p \\ Q = v + \frac{n_t \sin \varphi}{\beta} p \end{cases} \quad (17)$$

روابط مشخصه های به دست آمده را می توان برای محاسبه بردارهای شار در مرز مشترک بین دو سلول در روش حجم محدود استفاده کرد. به منظور ایجاد یک طرح محاسباتی بالادست چندبعدی براساس مشخصه های معادلات تراکم پذیری مصنوعی، می توان مسیرهای مشخصه مختلف و روابط سازگاری متناظر با آن ها را برای محاسبه بردارهای شار مرز مشترک به کار برد. در این مقاله، یک روش جدید بالادست کاملاً دوبعدی بر پایه مشخصه ها برای گسسته سازی معادلات تراکم پذیری ناویر- استوکس تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است. روابط سازگاری (16) برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار می گیرند در حالی که بردارهای شار لزج با طرح معمولی مرکزی گسسته می شوند.

### 3- بردارهای شار جابجایی

به منظور محاسبه بردارهای شار جابجایی در روی مرز مشترک دو سلول از مقادیر زمان قبل، چهار موج مجازی اکوستیک با مسیرهای تصویر شده موازی و عمود بر مرز مشترک دو سلول انتخاب شده اند. مطابق "شکل 2"، سطح مقطع کنج ماخ متناظر با نقطه مورد نظر در روی مرز مشترک دو سلول با صفحه  $xy$  نشان دهنده محدوده فیزیکی انتشار اطلاعات از زمان قبل می باشد که نقطه مذکور را در زمان حاضر تحت تاثیر قرار می دهند. همان طور که در "شکل 2" نشان داده شده است، به منظور در نظر گرفتن فیزیک واقعی چند بعدی جریان، چهار موج اکوستیک مجازی متناظر با شبکه انتخاب شده و معادلات (16) در روی آن ها گسسته سازی شده اند. انتخاب تعداد و زوایای موج های اکوستیک مجازی اختیاری بوده و در هر حالت منجر به طرح های محاسباتی مختلفی می شود.

طرح محاسباتی پیشنهادی در این مقاله، چهار موج اصلی متناظر با اضلاع شبکه را در نظر می گیرد. با توجه به "شکل 3"، برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در نقطه \* در روی مرز مشترک دو سلول  $i,j$  و  $i+1,j$  ابتدا خطوط واصل بین نقطه \* و مراکز دو سلول  $i,j$  و  $i+1,j$  در نظر گرفته می شوند که در شکل با امتدادهای 1 و 2 نشان داده شده اند. محل تقاطع بیضی ماخ با امتداد خطوط رسم شده به عنوان محل انتخاب دو موج

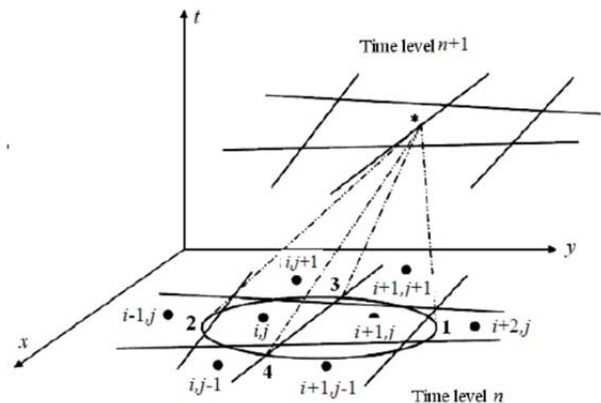


Fig. 2 Intersection of local Mach cone with time level plane  
شکل 2 تقاطع کنج ماخ با صفحه زمان

است. در این مقاله، گسسته سازی معمولی مرکزی برای تخمین جملات لزج در مرز مشترک دو سلول به کار رفته است. به عنوان مثال، مشتق مرتبه اول در روی وجه AB در "شکل 4" با انتگرال گیری روی یک شبکه ثانویه به صورت رابطه (22) محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{AB} &= \frac{1}{S'} \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} dS = \frac{1}{S'} \oint \phi dy = \frac{1}{S'} \sum_{k=1}^4 \phi_k \Delta y_k \\ &= \frac{1}{S'} [0.5(\phi_A + \phi_N) \Delta y_{AN} \\ &\quad + 0.5(\phi_N + \phi_B) \Delta y_{NB} \\ &\quad + 0.5(\phi_B + \phi_M) \Delta y_{BM} + 0.5(\phi_M + \phi_A) \Delta y_{MA}] \end{aligned} \quad (22)$$

که در رابطه (22)، مقادیر  $\phi$  به صورت زیر به دست می آیند.

$$\phi_A = \frac{1}{4} [\phi_{NW} + \phi_N + \phi_M + \phi_W]$$

جهت گسسته سازی زمانی از روش صریح رانگ-کوتای مرتبه چهارم استفاده شده است و بیشینه مقدار گام زمانی از شرط پایداری که بر روی عدد کورانت اعمال می شود، محاسبه می گردد. عدد کورانت به صورت رابطه (23) تعریف می شود.

$$CFL = \left[ \sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{u^2 + v^2 + \beta} \right] \frac{\Delta t}{\Delta l} \quad (23)$$

### 5- نتایج و بحث

در این بخش، دقت و سرعت همگرایی طرح پیشنهادی جدید براساس مقایسه آن با نتایج موجود مورد بررسی قرار گرفته است. طرح ارائه شده برای مدل سازی جریان سیال بدون انتقال گرما روی مسائل مختلف بررسی شده است [16,15]. در مقاله حاضر، طرح پیشنهادی روی دو مسئله کلاسیک مکانیک سیالات یعنی جریان داخل حفره مربعی و انتقال گرمای اجباری اطراف استوانه با مقطع دایره ای در حالت های پایا و ناپایا مورد بررسی قرار گرفته است. برای نشان دادن سرعت همگرایی طرح جدید، مقایسه تاریخچه همگرایی آن با دو روش مشخصه های معمولی و نیز روش میانگین گیری ارائه شده است و دقت طرح نیز برای اعداد رینولدز و گراشپف مختلف با نتایج تجربی و عددی موجود مقایسه شده است.

#### 5-1- جریان داخل حفره مربعی همراه با انتقال گرما

در این بخش، جریان سیال داخل حفره مربعی همراه با انتقال گرما مورد بررسی قرار می گیرد که این جریان توسط صفحه بالایی که با سرعت یکنواخت در راستای خود صفحه کشیده می شود، به وجود می آید. شرط مرزی در دیواره ها، شرط عدم لغزش می باشد. دیوارهای جانبی حفره عایق بوده و صفحه بالایی و پایینی دارای دماهای بی بعد مختلف می باشند. برای تغییرات چگالی، تقریب بوزینسک مورد استفاده قرار گرفته است و عدد پرانتل در تمام موارد 0.71 در نظر گرفته شده است. پارامتر  $\eta$  با استفاده از آزمایش های عددی بین یک و دو انتخاب شده است و محاسبات برای اعداد رینولدز و

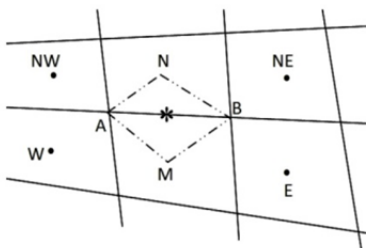


Fig. 4 Secondary cell for discretization of viscous terms

شکل 4 شبکه ثانویه برای محاسبه جملات لزج

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{2\beta}{\cos \varphi_1 [-u_1 \cos \varphi_1 - v_1 \sin \varphi_1 + k_1]} \\ B &= \frac{2\beta}{\sin \varphi_1 [-u_1 \cos \varphi_1 - v_1 \sin \varphi_1 + k_1]} \\ C &= \frac{4\beta \eta}{2k_2^2 + 4\beta - 2k_1 k_2} \\ D &= \frac{2\beta}{\cos \varphi_2 [-u_2 \cos \varphi_2 - v_2 \sin \varphi_2 + k_3]} \\ E &= \frac{2\beta}{\sin \varphi_2 [-u_2 \cos \varphi_2 - v_2 \sin \varphi_2 + k_3]} \\ F &= \frac{4\beta \eta}{2k_4^2 + 4\beta - 2k_3 k_4} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= \sqrt{(u_1 \cos \varphi_1 + v_1 \sin \varphi_1)^2 + 4\beta} \\ k_2 &= u_1 \cos \varphi_1 + v_1 \sin \varphi_1 \\ k_3 &= \sqrt{(u_2 \cos \varphi_2 + v_2 \sin \varphi_2)^2 + 4\beta} \\ k_4 &= u_2 \cos \varphi_2 + v_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \right. \quad (21)$$

شش معادله مشابه نیز برای موج های  $\varphi_3$  و  $\varphi_4$  وجود دارد. در روابط (19) مقادیر  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $p^*$  و  $T^*$  نشانگر متغیرهای اولیه جریان بر روی مرز مشترک بین دو سلول می باشند. ابتدا مقادیر  $u^*$  و  $p^*$  از روابط اول و چهارم، مقادیر  $v^*$  و  $p^*$  از روابط دوم و پنجم و  $T^*$  و  $p^*$  از روابط سوم و ششم در معادلات (19) محاسبه می شوند. مقدار  $p^*$  برابر با میانگین دو مقدار به دست آمده در نظر گرفته می شود. با توجه به استفاده از معادلات سازگاری مربوط به موج های  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  مقادیر  $u^*$  و  $v^*$  به دست آمده از این طریق به عنوان مولفه های سرعت در جهت n در نظر گرفته می شوند. با انجام عملیات مشابه برای روابط سازگاری متناظر با  $\varphi_3$  و  $\varphi_4$ ، مولفه های سرعت در جهت t به دست می آیند. در نهایت، بردار سرعت در روی مرز مشترک دو سلول از برآیند دو بردار به دست آمده مشخص شده و فشار در روی مرز مشترک از میانگین گیری دو مقدار به دست آمده برای  $p^*$  مشخص می شود. به این ترتیب مقادیر ستاره دار از 12 رابطه سازگاری متناظر با موج های  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  و  $\varphi_4$  و از مقادیر متغیرهای سیال در نقاط 1, 2, 3 و 4 از زمان قبل به دست می آیند که برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار می گیرند. با استفاده از این روش، یک طرح محاسباتی کاملاً بالادست دوبردی با تکیه بر مشخصه های دوبردی مصنوعی معادلات تراکم ناپذیر ارائه شده است. به منظور بهبود طرح ارائه شده به دقت مرتبه دوم، نقطه 1 از سلول های  $(i+1, j)$  و  $(i+2, j)$  و نقطه 2 از سلول های  $(i, j)$  و  $(i-1, j)$  درونیابی شده اند. همچنین مقادیر جریان در نقطه 3 از مقادیر سلول های  $(i, j+1)$  و  $(i+1, j+1)$  و در نقطه 4 از مقادیر سلول های  $(i, j-1)$  و  $(i+1, j-1)$  درونیابی شده اند. درونیابی مورد استفاده برای محاسبه مقادیر جریان در نقاط 1 تا 4 مشابه با روش های درونیابی مورد استفاده در موارد مشابه برای طرح های برپایه مشخصه ها در معادلات تراکم پذیر اویلر می باشد. به منظور افزایش مرتبه طرح محاسباتی از مرتبه اول به مرتبه دوم، دامنه گسترده تری از محدوده تاثیر در نظر گرفته می شود و درونیابی توسط نقاط دورتر انجام می گیرد. در واقع برای دقت مرتبه اول بیضی ماخ تنها محدود به دو سلول در طرفین وجه مورد نظر است در حالی که در دقت مرتبه دوم این محدوده تعداد سلول های بیشتری را شامل می شود و بر این اساس، محدوده تاثیر آن افزایش می یابد.

#### 4- بردارهای شار لزج و انتگرال گیری زمانی

برای تخمین بردارهای شار لزج در معادلات ناویر-استوکس و انرژی، نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه اول پارامترهای جریان در مرز مشترک بین دو سلول

نتایج به دست آمده، در اعداد گراشهف پایین، تغییرات سرعت در کل حفره وجود دارد. با افزایش عدد گراشهف مطابق "شکل 7"، تغییرات سرعت در راستای قائم فقط در قسمت بالایی حفره اتفاق می افتد ولی مطابق "شکل 8"، سرعت در راستای افقی تقریباً ثابت می ماند. "شکل های 9 و 10" مقایسه عدد ناسلت در دیواره های بالایی و پایینی را برای اعداد رینولدز و گراشهف مختلف نشان می دهند. مقایسه نتایج به دست آمده نشان می دهد که با افزایش عدد گراشهف، عدد ناسلت در دیواره های بالایی و پایینی کاهش می یابد.

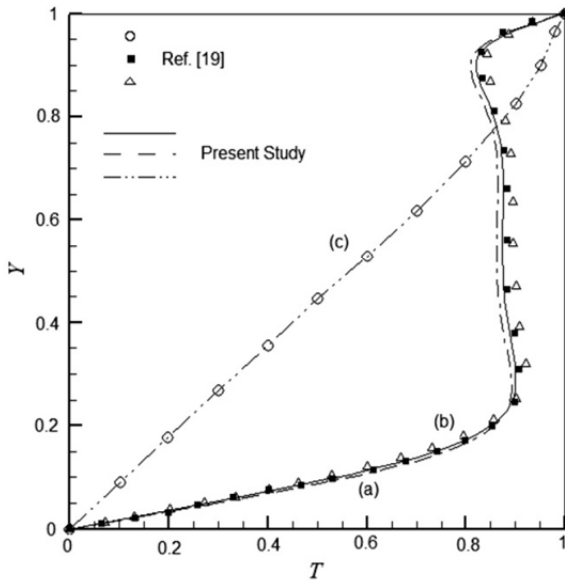


Fig. 6 Comparison of results for temperature profiles along vertical centerline at Re = 400 and (a) Gr = 10<sup>2</sup>, (b) Gr = 10<sup>4</sup>, (c) Gr = 10<sup>6</sup> on 80x80 uniform grid

شکل 6 مقایسه نتایج پروفیل دما بر روی خط مرکزی قائم حفره در Re = 400 و (a) Gr = 10<sup>2</sup>, (b) Gr = 10<sup>4</sup> و (c) Gr = 10<sup>6</sup> در یک شبکه 80x80

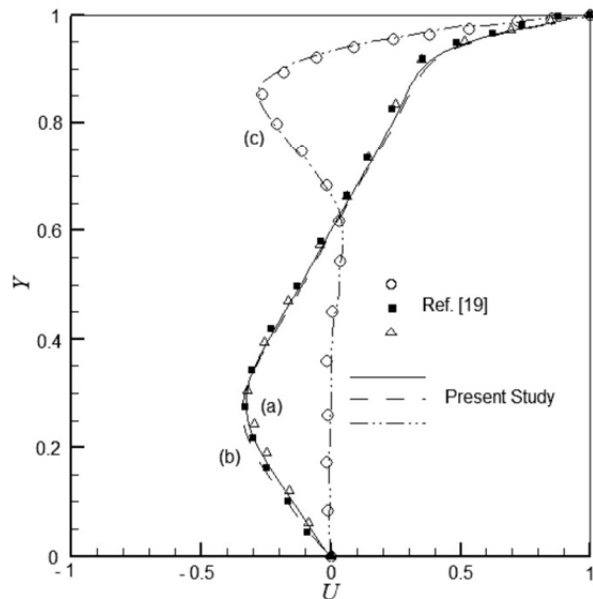


Fig. 7 Comparison of u-velocity profiles along vertical centerline at Re = 400 and (a) Gr = 10<sup>2</sup>, (b) Gr = 10<sup>4</sup>, (c) Gr = 10<sup>6</sup> on 80x80 uniform grid

شکل 7 مقایسه نتایج پروفیل سرعت در راستای محور x روی خط مرکزی قائم در Re = 400 و (a) Gr = 10<sup>2</sup>, (b) Gr = 10<sup>4</sup> و (c) Gr = 10<sup>6</sup> در یک شبکه 80x80

گراشهف مختلف تکرار شده است. عدد ریچاردسون، بیانگر اهمیت نیروهای شناوری نسبت به نیروهای اینرسی می باشد. برای اعداد ریچاردسون کوچک، نیروهای اینرسی دارای اهمیت بالایی بوده و نیروهای شناوری قابل صرف نظر می باشند در حالی که برای اعداد ریچاردسون بالا، نیروهای شناوری در حفره بر نیروهای اینرسی غلبه می نمایند. خطای ناشی از محاسبات با استفاده از رابطه (24) محاسبه می شود.

$$ENORM(\phi) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{IM} \sum_{j=1}^{JM} (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n)^2}}{\text{تعداد سلولها}} \quad (24)$$

"شکل 5" نرخ همگرایی طرح پیشنهادی را در مقایسه با روش مشخصه های معمولی و نیز روش میانگین گیری در Re = 1000 و Gr = 100 در یک شبکه 80x80 نشان می دهد. مطابق "شکل 5"، طرح پیشنهادی جدید دارای نرخ همگرایی بسیار سریع تری نسبت به روش مشخصه های معمولی می باشد، این در حالی است که در روش میانگین گیری امکان همگرایی جوابها وجود ندارد. باید به این نکته دقت شود که تمام روشها در بالاترین عدد کورانت مجاز خود اجرا شده اند. لازم به ذکر است که بالاترین مقدار عدد کورانت برای طرح پیشنهادی جدید برابر 1.6 می باشد در حالی که این مقدار برای روش مشخصه های معمولی برابر 0.9 می باشد. "شکل 6" مقایسه نتایج توزیع دما داخل حفره را بین طرح محاسباتی جدید با مرجع [19] نشان می دهد. در حالت حدی وقتی صفحه بالایی ساکن است، سیال داخل حفره تقریباً ساکن بوده و توزیع دما به سمت پروفیل خطی میل می کند. این مسئله بیانگر توزیع دمای ناشی از هدایت خالص در داخل حفره می باشد. در صورتی که در اعداد ریچاردسون پایین، تاثیر نیروهای شناوری کاهش یافته و در قسمت میانی حفره، تغییرات دمایی ناچیز بوده و گرادیان شدید دمایی در قسمت بالایی و پایینی حفره به وجود می آید.

مقایسه نتایج پروفیل سرعت در راستای محورهای افقی و عمودی در "شکل های 7 و 8" نشان داده شده اند. نتایج ارائه شده، تغییرات مشخصه های جریان با افزایش عدد گراشهف را در رینولدز ثابت نشان می دهند. مطابق

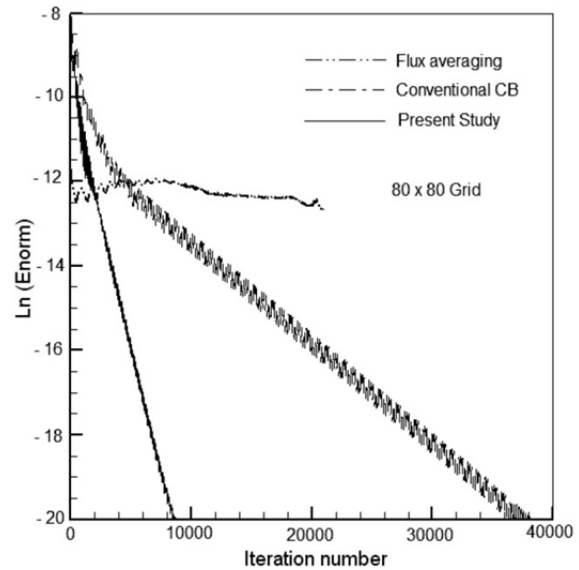


Fig. 5 Convergence history of temperature for MACB, conventional CB and flux averaging at Re = 1000 and Gr = 100

شکل 5 مقایسه نرخ همگرایی روش MACB، روش مشخصه های معمولی و روش میانگین گیری در Re = 1000 و Gr = 100

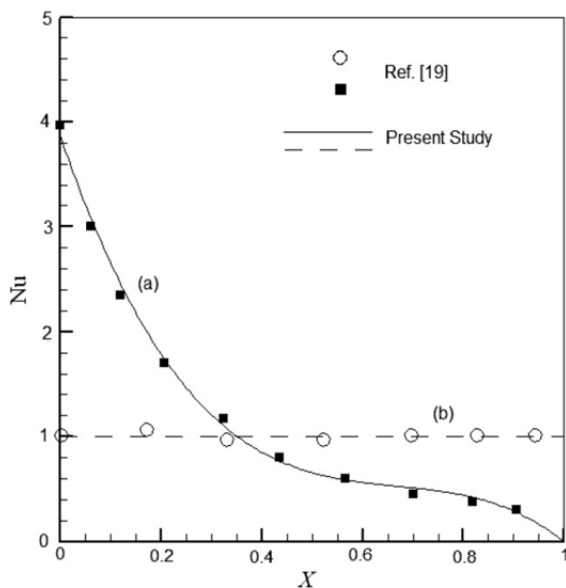


Fig. 10 Comparison of Nusselt number along (a) Top wall, (b) Bottom wall at  $Re = 400$  and  $Gr = 10^6$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 10 مقایسه عدد ناسلت در دیواره بالایی (a) و دیواره پایینی (b) در  $Re = 400$  و  $Gr = 10^6$  در یک شبکه  $80 \times 80$

و در اعداد رینولدز حدود 60 تا 5000 ناپایداری جریان خود را نشان می دهد و گردابه های تولید شده در طرفین استوانه به تدریج از آن جدا شده و به پایین دست انتقال می یابند. در این بخش به منظور ارزیابی توانایی طرح جدید در شبکه های غیرکارتزین، انتقال حرارت اجباری پایا و ناپایا حول استوانه دایره ای در شبکه O شکل با ریز کردن شبکه نزدیک دیواره جامد مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج حل عددی نشان می دهند برای اعداد رینولدز کوچکتر از 40 الگوی جریان به صورت پایا بوده و در رینولدزهای بالاتر، جداسدن نوسانی گردابه ها از پشت استوانه روی می دهد که نشانگر ناپایایی جریان است. شرایط مرزی اعمال شده در روی مرز جامد برای سرعت ها، شرط عدم لغزش و برای دما، شرط دمایی یکنواخت دیواره بوده و برای فشار از برون یابی مرتبه دوم از سلول های مجاور دیواره استفاده شده است. برای اعمال شرایط مرزی در مرزهای دور با توجه به فروصوتی بودن جریان، نیاز به تخصیص دو شرط مرزی در ورودی و یک شرط مرزی در خروجی از خارج دامنه محاسباتی می باشد. شرایط مرزی در مرزهای دور به صورت یک بعدی محلی و براساس شرایط مرزی مشخصه ای اعمال شده است. ورودی یا خروجی بودن مرز سلول در هر مرحله، با استفاده از جهت بردار سرعت بررسی شده و شرط مرزی مناسب اعمال گردیده است. در سلول های ورودی جریان، تنها فشار از داخل دامنه محاسباتی برونیابی شده و بقیه مقادیر از خارج دامنه تخصیص داده شده اند. در سلول های خروجی تنها مقدار فشار از خارج محدوده اعمال شده و سایر پارامترها از داخل درونیابی شده اند. مرز دور در اعداد رینولدز پایین برابر 40 برابر قطر استوانه و در اعداد رینولدز بالا برای مشاهده گردابه فون کارمن، مرز دور 80 برابر قطر قرار داده شده است. "شکل 11" مقایسه نرخ همگرایی بین طرح جدید، روش مشخصه های معمولی و نیز روش میانگین گیری را نشان می دهد. مطابق نتایج به دست آمده، طرح پیشنهادی جدید دارای سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش مشخصه های معمولی می باشد. همچنین مطابق این شکل، با استفاده از روش میانگین گیری، امکان همگرا شدن نتایج وجود ندارد.

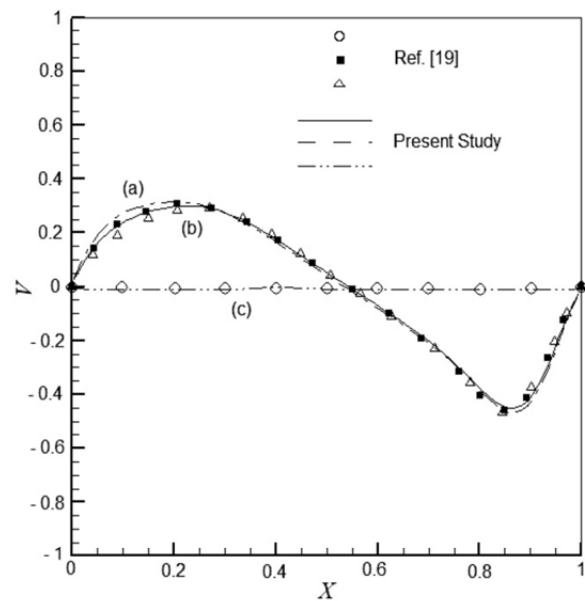


Fig. 8 Comparison of  $v$ -velocity profiles along horizontal centerline at  $Re = 400$  and (a)  $Gr = 10^2$ , (b)  $Gr = 10^4$ , (c)  $Gr = 10^6$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 8 مقایسه نتایج پروفیل سرعت در راستای محور  $y$  روی خط مرکزی افقی در  $Re = 400$  و  $Gr = 10^2$  (a) و  $Gr = 10^4$  (b) و  $Gr = 10^6$  (c) در یک شبکه  $80 \times 80$

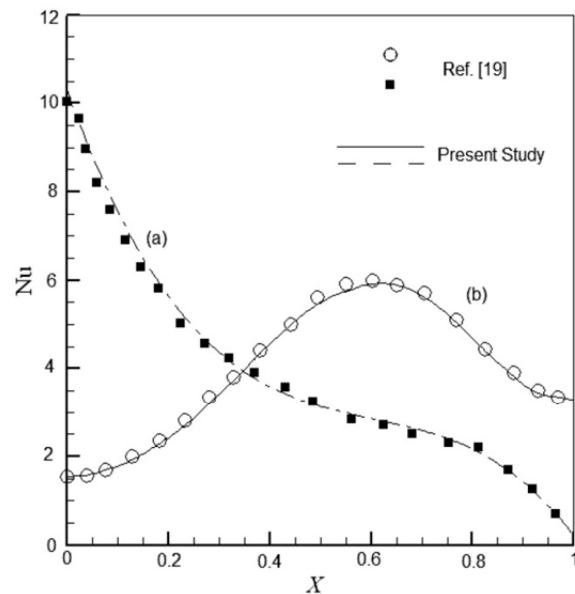


Fig. 9 Comparison of Nusselt number along (a) Top wall, (b) Bottom wall at  $Re = 400$  and  $Gr = 10^2$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 9 مقایسه عدد ناسلت در دیواره بالایی (a) و دیواره پایینی (b) در  $Re = 400$  و  $Gr = 10^2$  در یک شبکه  $80 \times 80$

### 2-5- جریان حول استوانه دایره ای

جریان صلیبی عبوری از روی یک استوانه با مقطع دایره ای دارای خواص ویژه ای می باشد. در اعداد رینولدز پایین لایه مرزی کاملاً چسبیده به استوانه بوده و با افزایش عدد رینولدز، جدایی لایه مرزی در بالا و پایین استوانه دیده می شود. برای اعداد رینولدز کمتر از 40 جریان جدا شده پایا بوده و با زمان تغییر نمی کند. با افزایش عدد رینولدز، ناپایداری هایی در جریان مشاهده شده

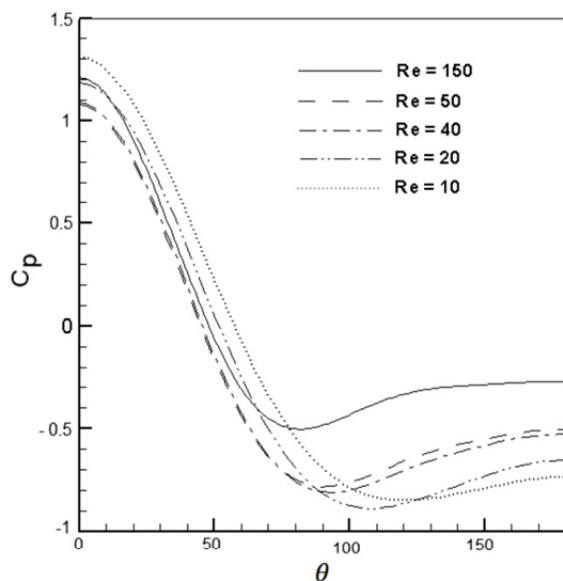


Fig. 13 Pressure coefficient for different Reynolds number on 80x80 uniform grid

شکل 13 مقایسه ضریب فشار حول استوانه برحسب زاویه در اعداد رینولدز مختلف در یک شبکه 80x80

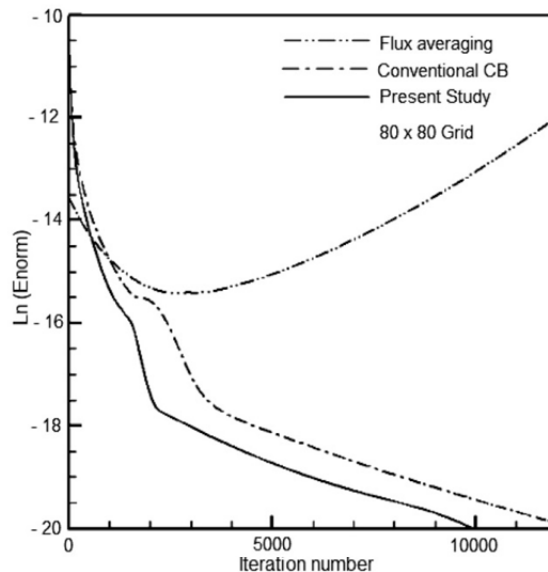
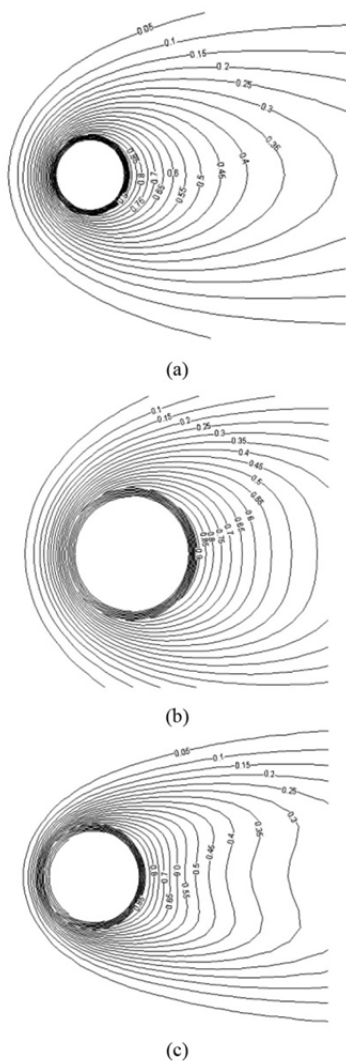


Fig. 11 Convergence history of MACB, conventional CB and flux averaging at Re = 40

شکل 11 مقایسه نرخ همگرایی روش MACB، روش مشخصه های معمولی و روش میانگین گیری در  $Re = 40$

"شکل 12" مقایسه ضریب توزیع فشار در  $Re = 40$  حول استوانه بین طرح محاسباتی جدید با مرجع [20] را نشان می دهد و توزیع ضریب فشار اطراف استوانه در رینولدزهای مختلف نیز در "شکل 13" نشان داده شده است.

"شکل 14" نتایج به دست آمده برای خطوط دما ثابت بی بعد را در اعداد رینولدز مختلف نشان می دهد که نشان دهنده گرادین شدید دمایی در اطراف استوانه می باشد و تاثیر ناپایداری های جریان روی خطوط دما ثابت در اعداد رینولدز بالاتر مشاهده می شود.

یکی از پارامترهای اساسی برای بررسی و مقایسه نتایج جریان حول استوانه، توزیع عدد ناسلت و نیز عدد ناسلت میانگین حول استوانه در اعداد رینولدز مختلف می باشد. "شکل 15" مقایسه توزیع عدد ناسلت حول استوانه بین طرح محاسباتی جدید با مرجع [21] را برای  $Re = 50$

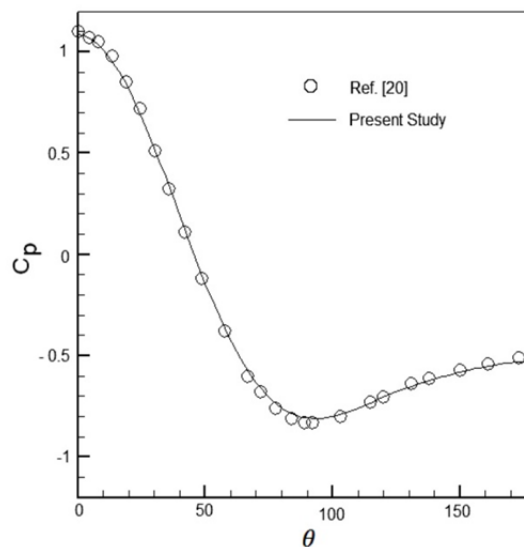


Fig. 12 Comparison of pressure coefficient at Re = 40

شکل 12 مقایسه توزیع ضریب فشار اطراف استوانه در  $Re = 40$

Re = 150 نشان می دهد. مقایسه عدد ناسلت میانگین حول استوانه بین طرح محاسباتی جدید با مراجع [26-22] در "شکل 17" ارائه شده است. از دیگر پارامترهای اساسی در بررسی جریان حول استوانه، تعیین موقعیت نقاط سکون می باشد. در "شکل 17" تعریف طول باز چرخش در پشت استوانه ارائه شده است. این طول در جریان های پایا، برابر طولی است که دو گردابه پایینی و بالایی به هم می رسند. به عبارت دیگر، طول بازچرخش برابر فاصله بین دو نقطه سکون در پایین دست استوانه می باشد. "شکل 18" مقایسه بین نتایج سرعت افقی برحسب  $x$  در پشت استوانه را بین طرح پیشنهادی جدید با مراجع [28,27] نشان می دهد. مطابق این شکل، طول بازچرخش برابر طولی است که در آن نقطه سرعت افقی به صورت لحظه ای به صفر می رسد.

در "شکل 19" خطوط جریان حول استوانه در اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده اند. مطابق نتایج به دست آمده، در اعداد رینولدز زیر 40 جریان دارای ماهیت پایا می باشد. در عدد رینولدز برابر 10، خطوط جریان به موازات یکدیگر می باشند ولی در  $Re = 20$  زوج گردابه در پشت استوانه تشکیل می شود و با افزایش رینولدز این گردابه ها بزرگتر می شوند. با افزایش عدد رینولدز، ماهیت پایای جریان دچار تغییر شده و در  $Re = 150$ ، جریان ناپایا می باشد که خطوط جریان برای این حالت در زمان های مختلف از شماره 1 تا 6 در "شکل 20" نشان داده شده اند. مطابق "شکل 20"، گردابه ها به صورت تناوبی در پشت استوانه تشکیل شده و با جدا شدن از استوانه و حرکت به سمت پایین دست جریان، خیابان گردابی فون کارمن را تشکیل می دهند.

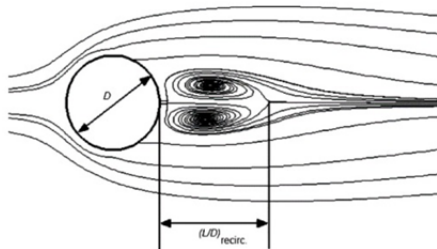


Fig. 17 Recirculation length definition

شکل 17 تعریف طول بازچرخش بدون بعد در پشت استوانه

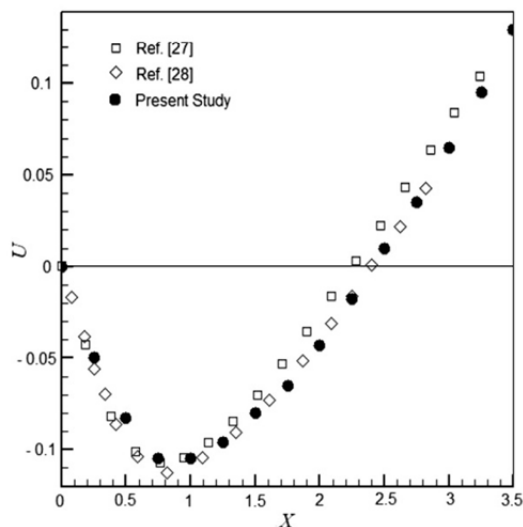
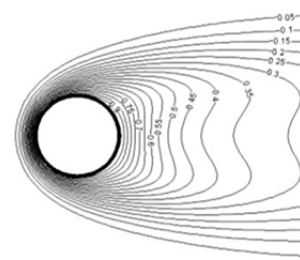


Fig. 18 Comparison of  $u$ -velocity at  $Re = 40$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 18 مقایسه نتایج سرعت  $u$  بر حسب  $x$  در پشت استوانه در  $Re = 40$  در شبکه  $80 \times 80$



(d)

Fig. 14 Computed isotherms at (a)  $Re = 10$ , (b)  $Re = 20$ , (c)  $Re = 40$  and (d)  $Re = 50$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 14 توزیع خطوط دما ثابت در (a)  $Re = 10$ ، (b)  $Re = 20$ ، (c)  $Re = 40$  و (d)  $Re = 50$  در یک شبکه  $80 \times 80$

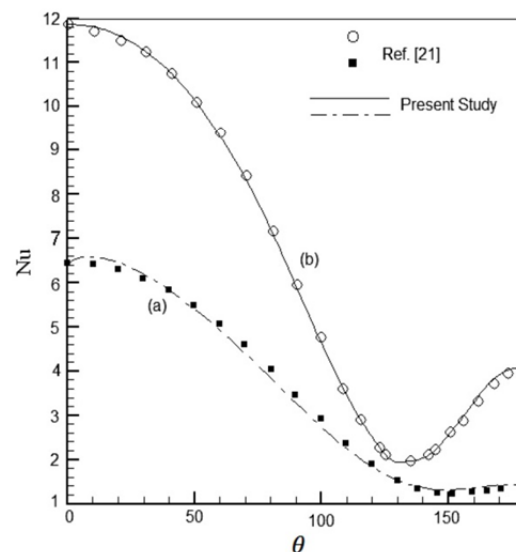


Fig. 15 Comparison of Nusselt number distribution along the cylinder surface at (a)  $Re = 50$  and (b)  $Re = 150$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 15 مقایسه توزیع عدد ناسلت حول استوانه برحسب زاویه برای (a)  $Re = 50$  و (b)  $Re = 150$  در یک شبکه  $80 \times 80$

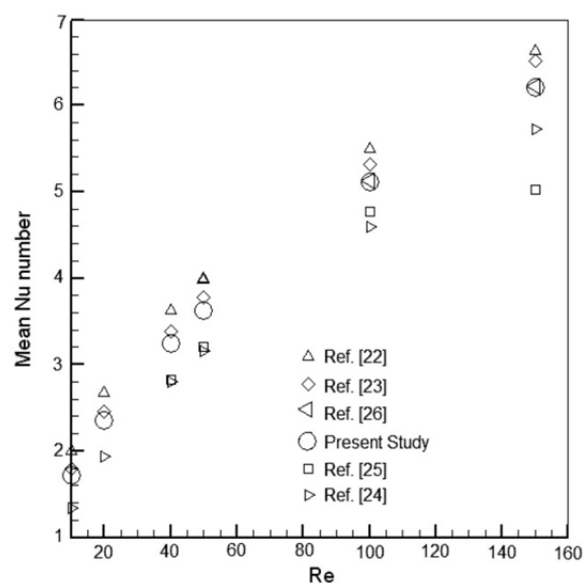


Fig. 16 Comparison of mean Nusselt number around a circular cylinder

شکل 16 مقایسه عدد ناسلت میانگین حول استوانه

زمانی صریح به صورت طرح رانگ-کوتای مرتبه چهار برای پیشروی در زمان استفاده شده است. روش جدید برای تحلیل دو جریان تراکم ناپذیر داخل حفره مربعی و جریان اطراف استوانه دایره ای در حالت پایا و ناپایا مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج به دست آمده با نتایج روش مشخصه ها و نیز روش میانگین گیری مورد مقایسه قرار گرفته اند. مطابق نتایج به دست آمده، طرح پیشنهادی جدید، نتایج دقیق تری را نسبت به سایر طرح های مورد مطالعه ارائه می دهد. همچنین، مقایسه دقت جواب های به دست آمده در شبکه های یکسان، نشان دهنده همگرایی سریع تر طرح جدید نسبت به سایر روش های مورد بررسی می باشد. مزیت دیگر طرح جدید نسبت به سایر روش های مورد مطالعه، بالا بودن محدوده عدد کورانت مجاز در هنگام استفاده از طرح جدید می باشد که بیانگر پایداری بالای آن می باشد، این در حالی است که سایر روش ها دارای عدد کورانت پایین تری نسبت به طرح جدید می باشند. به منظور ارزیابی توانایی طرح جدید در شبکه های غیرکارتزین، جریان تراکم ناپذیر پایا و ناپایا حول استوانه دایره ای همراه با انتقال گرما نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. در اعداد رینولدز بالاتر در جریان اطراف استوانه، طرح جدید به خوبی قادر به تسخیر پدیده جدا شدن تناوبی گردابه ها از پشت استوانه و تشکیل خیابان گردابی فون کارمن می باشد. دقت بالا و همگرایی سریع تر این روش نسبت به روش مشخصه های معمولی در تمام تحلیل های انجام شده مشهود است. در جریان اطراف استوانه، روش میانگین گیری مرکزی در اعداد رینولدز بالا و برخی شبکه ها، شدیداً ناپایدار می باشد، در حالی که در طرح جدید حتی در اعداد رینولدز خیلی بالا و هرگونه شبکه بندی نیاز به افزودن هیچ جمله پایداری به معادلات نمی باشد. دلیل این امر نیز ماهیت بالادستی ذاتی طرح جدید و عدم استفاده از فرض های ساده کننده یک بعدی می باشد. با توجه به موارد بررسی شده، طرح پیشنهادی جدید به دلیل دارا بودن سرعت همگرایی بالا، هزینه محاسباتی کمتر و دقت بالای جواب ها جهت تحلیل جریان سیال تراکم ناپذیر همراه با انتقال گرما پیشنهاد می گردد.

7- فهرست علائم

CFL	عدد کورانت
$C_p$	ضریب فشار
$f(x, y, t)$	سطح مشخصه
Fr	عدد فرود
$\vec{F}_c$	بردار شار جابجایی
$\vec{F}_v$	بردار شار لزج
Gr	عدد گراشوف
$m$	گام زمانی
$n$	جهت عمود بر سطح
Nu	عدد ناسلت
$\hat{n}$	بردار عمود بر سطح مشخصه
$n_t$	مولفه مماسی بردار عمود بر سطح
$p$	فشار (Pa)
Pr	عدد پرانتل
$\vec{q}$	شار حرارتی ( $Wm^{-2}$ )
$R$	ترم چشمه در معادلات ناویر-استوکس
Re	عدد رینولدز
Ri	عدد ریچاردسون
$S$	مساحت سطح ( $m^2$ )

همچنین خطوط همدمای لحظه ای در  $Re = 150$  در "شکل 21" ارائه شده است که بیانگر ماهیت ناپایای جریان می باشد.

6- جمع بندی

در این مقاله، یک روش بالادست چند بعدی جدید براساس مشخصه های جریان برای حل معادلات ناویر-استوکس جریان تراکم ناپذیر به همراه معادله انرژی ارائه شده است. روش جدید ارائه شده در این مقاله، براساس گسسته سازی حجم محدود مرکز سلول می باشد و روابط استخراج شده برای مشخصه های دوبعدی، برای تخمین بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار گرفته است. بردارهای شار لزج توسط یک طرح میانگین گیری مرتبه دوم معمولی محاسبه شده اند و از گسسته سازی

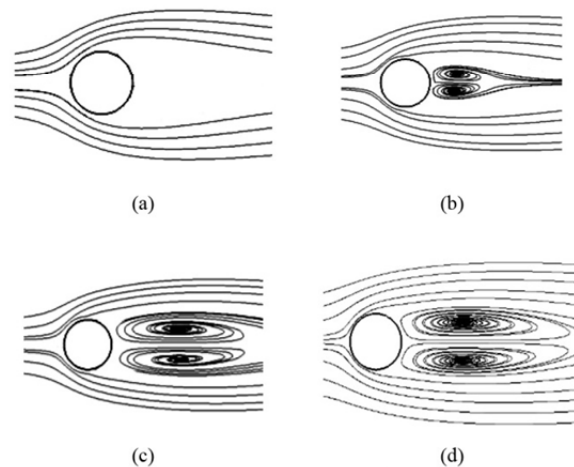


Fig. 19 Computed streamlines at (a)  $Re = 10$ , (b)  $Re = 20$ , (c)  $Re = 40$  and (d)  $Re = 50$  on  $80 \times 80$  uniform grid

شکل 19 خطوط جریان در (a)  $Re = 10$ ، (b)  $Re = 20$ ، (c)  $Re = 40$  و (d)  $Re = 50$  در یک شبکه  $80 \times 80$

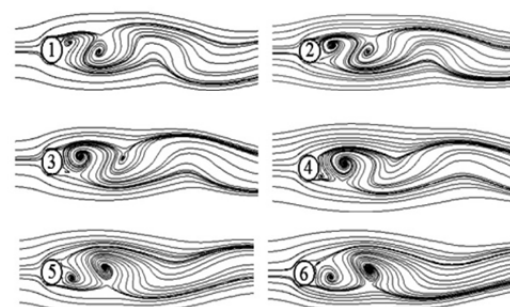


Fig. 20 Transient streamlines for  $Re = 150$  at different times

شکل 20 خطوط جریان ناپایا حول استوانه در  $Re = 150$



Fig. 21 Instantaneous temperature contour at  $Re = 150$

شکل 21 خطوط دما ثابت لحظه ای حول استوانه در  $Re = 150$

[9] Y. Bao, D. Zhou, Y. J. Zhao, A two-step Taylor-characteristic-based Galerkin method for incompressible flows and its application to flow over triangular cylinder with different incidence angles, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 62, No. 11, pp. 1181-1208, 2010.

[10] Y. Guo, R. Liu, Characteristic-based finite volume scheme for 1D Euler equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 30, No. 3, pp. 303-312, 2009.

[11] E. Shapiro, D. Drikakis, Non-conservative and conservative formulations of characteristics-based numerical reconstructions for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, No. 9, pp. 1466-1482, 2006.

[12] K. Hejranfar, R. Kamali Moghadam, Preconditioned characteristic boundary conditions for solution of the preconditioned Euler equations at low Mach number flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 12, pp. 4384-4402, 2012.

[13] K. Hejranfar, K. Parseh, Preconditioned characteristic boundary conditions based on artificial compressibility method for solution of incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 345, 2017.

[14] N. Massarotti, F. Arpino, R. W. Lewis, P. Nithiarasu, Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, No. 10, pp. 1618-1640, 2006.

[15] S. E. Razavi, K. Zamzamin, A. Farzadi, Genuinely multidimensional characteristic-based scheme for incompressible flows, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 57, No. 8, pp. 929-949, 2008.

[16] K. Zamzamin, S.E. Razavi, Multidimensional upwinding for incompressible flows based on characteristics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 19, pp. 8699-8713, 2008.

[17] S. E. Razavi, *Far Field Boundary Conditions for Computation of Compressible Aerodynamic Flows*, Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill university, Montreal, Canada, 1995.

[18] M. J. Zaczow, J. D. Hoffman, *Gas Dynamics*, Vol. II, John Wiley and Sons, 1976.

[19] R. Iwatsu, J. M. Hyun, K. Kuwahara, Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 6, pp. 1601-1608, 1993.

[20] J. Choi, R. C. Oberoi, J. R. Edwards, J. A. Rosati, An immersed boundary method for complex incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 224, No. 2, pp. 757-784, 2007.

[21] L. Baranyi, Computation of unsteady momentum and heat transfer from a fixed circular cylinder in laminar flow, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Vol. 4, No. 1, pp. 13-25, 2003.

[22] H. A. Karamers, Heat transfer from spheres to following media, *Physica*, Vol. 12, No. 2-3, pp. 61-80, 1946.

[23] R. M. Fand, Heat transfer by forced convection from a cylinder to water in crossflow, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 8, No. 7, pp. 955-1010, 1965.

[24] S. Whitaker, Forced convection heat transfer calculations for flow in pipes, past flat plate, single cylinder, and for flow in packed beds and tube bundles, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. 18, No. 2, pp. 361-371, 1972.

[25] H. C. Perkins, G. Leppert, Local heat-transfer coefficients on a uniformly heated cylinder, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 7, No. 2, pp. 143-158, 1964.

[26] S. W. Churchill, M. Bernstein, A correlating equation for forced convection from gases and liquids to a circular cylinder in cross flow, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 99, No. 2, pp. 300-306, 1977.

[27] T. W. H. Sheu, H. F. Ting, R. K. Lin, An immersed boundary method for the incompressible Navier-Stokes equations in complex geometry, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, No. 7, pp. 877-898, 2008.

[28] A. L. F. L. Silva, A. Silverira-Neto, J. J. R. Damasceno, Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 189, No. 2, pp. 351-370, 2003.

مساحت سلول ( $m^2$ )	$S'$
جهت مماسی	$t$
دما (K)	$T$
مولفه افقی سرعت ( $ms^{-1}$ )	$u$
بردار سرعت ( $ms^{-1}$ )	$\vec{U}$
مولفه عمودی سرعت ( $ms^{-1}$ )	$v$
بردار سرعت مجازی ( $ms^{-1}$ )	$\hat{V}$
بردار متغیرهای وابسته	$W$

علایم یونانی

تراکم پذیری مصنوعی	$\beta$
ضریب انبساط حجمی ( $K^{-1}$ )	$\beta_{ex}$
نام گذاری عمومی برای متغیرهای جریان	$\emptyset$
زاویه موج ( $rad^{-1}$ )	$\varphi$
ضریب پیوند	$\eta$
محورهای مماسی حول استوانه (rad)	$\theta$
چگالی ( $kgm^{-3}$ )	$\rho$
تنش های لزجی ( $Nm^{-2}$ )	$\tau_{ij}$

بالانویس ها

*	کمیت های بی بعد
---	-----------------

8- مراجع

[1] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, No. 1, pp. 12-26, 1967.

[2] D. Kwak, C. Kiris, C. S. Kim, Computational challenges of viscous incompressible flows, *Computers & Fluids*, Vol. 34, No.3, pp. 283-299, 2005.

[3] D. Drikakis, P. A. Govatsos, D. E. Papantonis, A characteristic based method for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 19, No. 8, pp. 667-685, 1994.

[4] Y. Zhao, B. Zhang, A high-order characteristics upwind FV method for incompressible flow and heat transfer simulation on unstructured grids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No 5-7, pp. 733-756, 2000.

[5] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu, *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*, Seventh Edition, pp. 87-125, Butterworth-Heinemann, 2014.

[6] P. Nithiarasu, C. B. Liu, An artificial compressibility based characteristic based split (CBS) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 23-24, pp. 2961-2982, 2006.

[7] X. Su, Y. Zhao, X. Huang, On the characteristics-based ACM for incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, NO. 1, pp. 1-11, 2007.

[8] L. Zhu, P. Wang, Z. Guo, Performance evaluation of the general characteristics based off-lattice Boltzmann scheme and DUGKS for low speed continuum flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 333, pp. 227-246, 2017.