Archive of SID

مدل‌سازی و حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با دنباله مد نامعلوم با استفاده از بهینه‌سازی ازدحام ذرات و روش رونوشت مستقیم

زینب دالوند*، مصطفی شمسی** و مسعود حجاریان [۱*]

*گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی

**گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۵

چکیده: در این مقاله بر روی دسته خاصی از مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با سوییچ خودگردان تمرکز می‌گردد. حل عددی مسائل کنترل بهینه سوییچ خودگران، به علت تعامل میان دینامیک پیوسته و گسسته، ساده نیست و روش‌های عددی مستقیم و غیرمستقیم ارائه‌شده دارای ایرادهایی، ازجمله حساسیت نسبت به حدس اولیه و ناتوانی در یافتن جواب کمینه سراسری می‌باشند. در این مقاله برای برطرف کردن این مشکلات، کاربرد روش‌های فرا ابتکاری پیشنهاد می‌شوند. در این روش ابتدا از این نوع روش‌ها (به‌عنوان مثال، روش PSO) جهت تعیین دنباله مد مسئله استفاده می‌شود؛ سپس با توجه به دنباله مد تعیین‌شده، یک مسئله با دنباله مد معلوم به دست می‌آید و در نهایت با استفاده از با استفاده از روش رونوشت مستقیم ذوزنقه زمان‌های سوییچ، مقدار بهین تابع هدف و متغیرهای حالت و کنترل برآورد می‌شوند. در واقع با ارائه‌ی این روش به رفع چالش‌های اساسی حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با سوییچ خودگردان که در آن‌ها تعداد سوییچ و دنباله مد مجهول است، می‌پردازیم. در پایان نتایج عددی برای یک مثال ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه، سیستم ترکیبی، سوییچ خودگردان، الگوریتم ازدحام ذرات، دنباله مد، نقاط سوییچ، فرم مایر تابع هدف.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۴۹J۱۵، ۷۸M۳۲.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m_hajarian@sbu.ac.ir

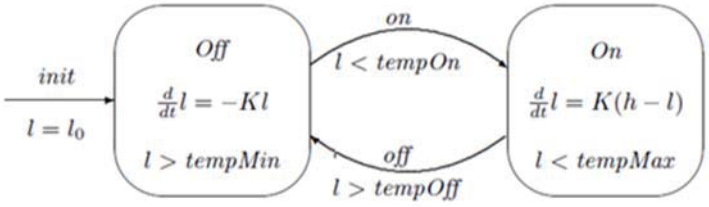
www.SID.ir

Archive of SID

۱- مقدمه

به‌طورکلی واژه «هیبرید» به‌عنوان صفت، به معنای چیزی است که حاصل تلفیق دو خاصیت (دو ماده، دو سیستم، دو رفتار) نامتجانس با یکدیگر می‌باشد. لذا سیستم‌هایی که از دو جزء متفاوت تشکیل شده باشند، هیبرید یا ترکیبی نامیده می‌شوند. سیستم‌های ترکیبی به‌طور هم‌زمان، دربرگیرنده متغیرهای پیوسته و گسسته می‌باشند. در نظریه سیستم‌های دینامیکی بسیاری از متون، سیستم‌های ترکیبی را، تلفیق سیستم‌های حالت-پیوسته و سیستم‌های رویداد-گسسته نامیده‌اند [۱]. ازنقطه‌نظر تاریخی ظاهراً قدیمی‌ترین مرجعی که در آن به سیستم ترکیبی به مفهوم سیستمی شامل دینامیک‌های گسسته و پیوسته اشاره شده است، مرجع [۱] می‌باشد که در سال ۱۹۶۶ منتشر شده است.

بسیاری از پدیده‌هایی که هر روز با آن سروکار داریم در زمره سیستم‌های ترکیبی قرار می‌گیرند. یک مثال رایج از سیستم‌های ترکیبی، سیستم کنترل دما است (سیستم ترموستات) که از یک گرم‌کننده و یک ترموستات تشکیل شده است. چنین سیستم‌هایی می‌توانند در دو مد، وابسته به این‌که گرم‌کننده روشن یا خاموش باشد، عمل کنند. همچنین دمای اتاق مطابق با معادلات دیفرانسیل تغییر می‌کند. متغیرهای سیستم، دما و مد عملیاتی گرم‌کن است که مسلماً بین این دو متغیر ارتباط وجود دارد. هنگام کنترل درجه‌ی اتاق با یک ترموستات و یک سیستم گرمایشی، زمانی که اتاق به‌اندازه کافی گرم شود. با فرمان ترموستات سیستم گرمایشی قطع می‌گردد و مد گرم‌کن از روشن به خاموش تغییر می‌کند. زمانی که دما به درجه‌ای مشخص برسد، سیستم گرمایشی دوباره وصل شده و دما را بالا می‌برد. در هر کدام از حالت‌های فوق، با دینامیک‌های مختلفی سروکار داریم. در شکل ۱ نمایی از یک سیستم ترموستات نشان داده شده است که بین دو مد خاموش و روشن عمل می‌کند [۲].



شکل (۱): نمایی از یک سیستم ترموستات

www.SID.ir

۲- کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی

یکی از مباحثی که در مطالعات مربوط به سیستم‌های ترکیبی موردتوجه قرار گرفته است، مبحث کنترل بهینه می‌باشد. در مسائل کنترل بهینه ترکیبی، سیستم‌های ترکیبی بر اساس دینامیکی پیوسته و گسسته، به حالت‌های پیوسته و گسسته با کنترل‌های پیوسته و گسسته، مدل شده‌اند. در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی روی مباحث کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی انجام شده است [۳-۵]. مسائل ترکیبی در دسته‌های مختلفی قرار می‌گیرند که ازجمله آن‌ها می‌توان به مسائل کنترل بهینه سیستم‌های سوییچ کننده، سیستم‌های ترکیبی با سوییچ خودگردان و سیستم‌های عدد صحیح آمیخته اشاره کرد. در این مقاله حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با سوییچ خودگردان مدنظر است که در ادامه به شرح مدل ریاضی این مسائل و مثال‌های از آن‌ها پرداخته شده است.

۲-۱- مسائل کنترل بهینه سیستم سوییچ کننده

یک دسته مهم از سیستم‌های ترکیبی، سیستم‌های سوییچ کننده هستند؛ رفتار دینامیکی آن‌ها توسط تعداد محدودی مدل دینامیکی به همراه مجموعه‌ای از قواعد، برای سوییچ بین آن‌ها توصیف می‌شود و مدل دینامیکی سیستم توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شود. بسیاری از مسائل کنترلی را می‌توان در چهارچوب سیستم‌های سوییچ کننده فرمول‌بندی کرد. به‌عنوان نمونه می‌توان به سیستم مکانیکی همراه با اصطکاک، بازوی مکانیکی ربات، جعبه‌دنده یا گیربکس خودکار، مدارهای الکتریکی که در آن‌ها وسایل گوناگون در دامنه‌های فرکانسی متفاوت به‌کاربرده می‌شود، مدارهای شامل دیود یا سوییچ الکترونی و غیره اشاره نمود [۳-۱۰]. علاوه بر این دینامیک‌های پیچیده غیرخطی را می‌توان به چندین مد عملیاتی تجزیه کرد تا یک سیستم سوییچ کننده حاصل شود؛ در این صورت آنالیز و طراحی سیستم ساده‌تر می‌گردد [۱۱]. در ادامه به بیان مدل ریاضی این مسائل می‌پردازیم.

۲-۱-۱- مدل ریاضی مسئله کنترل بهینه یک سیستم سوییچ کننده

در این مسائل، با فرض این‌که سیستم دارای n_q زیرسیستم باشد، سیستم دینامیکی، با معادلات دیفرانسیلی زیر توصیف می‌گردد [۱۲]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f_q(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \qquad q \in Q = \{1, 2, \cdots, n_q\} \qquad t \in [0, t] \qquad (1)$$

www.SID.ir

Archive of SID

که در آن $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ متغیر حالت پیوسته و $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^M$ کنترل ورودی سیستم می‌باشند. برای هر مد[۱] $q \in Q$، تابع $f_q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ میدان برداری است که دینامیک سیستم در آن مد را توصیف می‌کند. سیگنال سوییچ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \{(t_0, q_0), (t_1, q_1), \ldots, (t_n, q_n)\} \qquad (۲)$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ تعداد سوییچ‌ها و $t_0, t_1, \ldots, t_n$ زمان‌های سوییچ هستند به‌طوری‌که $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le t_{n+1} = t_f$ و $q_i \in Q, i = 0, 1, \ldots, n$. همچنین $\{(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}$ دنباله‌ی زمان‌های سوییچ و $\{(q_0, q_1, \ldots, q_n)\}$ دنباله مد یا سکانس سوییچ نامیده می‌شوند. بر اساس سکانس سوییچ، معادلات دینامیکی سیستم به‌صورت زیر قابل‌بیان است.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f_{q_i}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = 0, 1, \ldots, n; \qquad (۳)$$

در واقع زوج مرتب (t_i, q_i) بیانگر آن است که در زمان سوییچ t_i، دینامیک سیستم از مد q_{i-1} به مد q_i تغییر می‌یابد و در بازه زمانی $[t_i, t_{i+1}]$ دینامیک f_{q_i} برقرار است. متغیر حالت $\boldsymbol{x}(t)$، ممکن است در زمان‌های سوییچ به‌صورت پیوسته بوده یا پرش داشته باشد که در این دو حالت از شرایط زیر برای بیان رابطه میان $\boldsymbol{x}(t^+)$ و $\boldsymbol{x}(t^-)$ استفاده می‌شود؛ اگر متغیر حالت پیوسته باشد شرط $\boldsymbol{x}(t^-) = \boldsymbol{x}(t^+)$ برقرار است و اگر در زمان سوییچ، پرش رخ دهد از شرط زیر استفاده می‌شود:

$$\boldsymbol{x}(t_i^+) = \rho_{(p_i, p_{i+1})}(\boldsymbol{x}(t_i^-)), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۴)$$

جایی که تابع $\rho_{(p_i, p_{i+1})} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ تابع شروع مجدد، $\boldsymbol{x}(t^+)$ و $\boldsymbol{x}(t^-)$ به ترتیب مقدار متغیر حالت دقیقاً بلافاصله بعد و قبل از زمان سوییچ هستند. شرط اولیه مسئله به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad (۵)$$

فرض می‌کنیم متغیر حالت پیوسته و ورودی کنترل در قید مسیر زیر صدق کنند.

$$h_j(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \le 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N_c \qquad t \in [t_0, t_f] \qquad (۶)$$

تابعی معیار را به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

۱-Mode

www.SID.ir

$$J[\sigma, \boldsymbol{u}] = \Psi(\boldsymbol{x}(t_{n+1})) + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_{q_i}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt \qquad (۷)$$

لازم به ذکر است که به‌طورکلی در مسائل کنترل بهینه تابع هزینه به یکی از سه صورت زیر قابل‌بیان است:

۱) تابع هزینه به فرم مایر[1]

۲) تابع هزینه به فرم بولزا[2]

۳) تابع هزینه به فرم لاگرانژ

در فرم مایر، تابع هزینه تابعی از زمان نهایی مسئله به فرم زیر می‌باشد:

$$J = \Psi(\boldsymbol{x}(t_f))$$

فرم بولزا به‌صورت $J = \Psi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt$ و فرم لاگرانژ به‌صورت $J = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt$ تعریف می‌شود که در آن Ψ هزینه نهایی و L هزینه انتگرالی می‌باشد. قابل‌ذکر است که فرم‌های لاگرانژ و بولزا قابل‌تغییر به فرم مایر هستند (جهت مطالعه بیشتر مرجع [۱۳].را مطالعه بفرمایید). با توجه به آنچه گفته شد، تابعی هدف (۷) از نوع بولزا می‌باشد که در این مقاله برای سادگی به فرم مایر تبدیل شده است.

در مسئله کنترل بهینه یک سیستم سوییچ کننده، هدف یافتن سیگنال سوییچ یا دنباله مد و ورودی کنترل ا ست به‌طوری‌که معادلات (۳)، قیود مسیری (۶)، شرط اولیه (۵) و شرط پرش (۴) برقرار باشند و تابع معیار (۷) کمینه گردد.

۲-۲- مسئله کنترل بهینه سیستم ترکیبی با سوییچ خودگردان

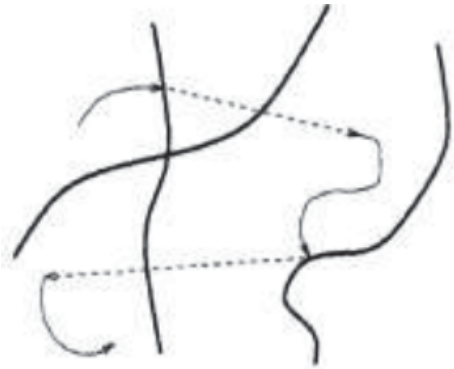
در برخی مسائل، سوییچ راهکاری است که با منیفلدهای سوییچ[3] (مرزهای بین ناحیه‌های مختلف در فضای حالت) مشخص می‌شود. سوییچ زمانی رخ می‌دهد که متغیر حالت به منیفلد سوییچ برسد. برای مثال هنگامی‌که ارتفاع هواپیما به ارتفاع مشخصی می‌رسد از مد «افزایش[4] » به مد

1- Mayer
2- Bolza
3- Switch manifolds
4- Climb

www.SID.ir

Archive of SID

«عبور[1]» سوییچ می‌کند. به این سوییچ، سوییچ خودگردان گفته می‌شود [۱۴]. در شکل ۲ نمایی از یک سیستم سوییچ خودگردان نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فضای حالت به تعدادی ناحیه تقسیم شده است که مرز بین این ناحیه‌ها منیفلدهای سوییچ نامیده می‌شود و زمانی که سیستم به منیفلدهای سوییچ می‌رسد وضعیت سیستم تغییر می‌کند.



شکل (۲): نمایی از یک سیستم سوییچ خودگردان

۲-۲-۱- مدل ریاضی مسئله کنترل بهینه سوییچ خودگردان

در این مسائل فرض بر آن است که فضای حالت به تعدادی ناحیه χ_i افراز شده است به‌طوری‌که در هر کدام از نواحی، دینامیک مسئله به‌صورت زیر می‌باشد [۱۵]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f_i(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \qquad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \qquad q_i \in Q$$

که در آن $t \in \mathbb{R}^+$، Q مجموعه اندیس نواحی است و برای هر $t \in [t_i, i_1]$ و $i \in \{0,1,\ldots,k\}$، $\boldsymbol{x}(t) \in \chi_i \subseteq \mathbb{R}^N$، $\boldsymbol{u}(t) \in U_i \subseteq \mathbb{R}^M$. دینامیک سراسری سیستم هم به نواحی χ_i و هم به دینامیک موضعی وابسته می‌باشد. در کل شکل هر کدام از نواحی می‌تواند به‌صورت دلخواه باشد. نواحی می‌توانند دارای مرز مشترک باشند، البته با این شرط که اندازه لبگ مرزهای مشترک برابر صفر باشد. فرض بر آن است که سیستم خوش‌تعریف باشد، به این معنی که برای هر حالت اولیه، مسیر یکتایی وجود داشته باشد. در مسائل کنترل بهینه با سوییچ خودگردان هدف یافتن مسیری بهینه است به‌طوری‌که تابع معیار کمینه گردد. بدین ترتیب فرم کلی این مسائل را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد [۱۵]:

1- Cruise

www.SID.ir

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } J = g(\boldsymbol{x}(t_f)) + \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_{q_i}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt \\
&\text{s.to: } \dot{\boldsymbol{x}}(t) = f_{q_i}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = 0, \ldots, n; \\
&m_{i-1,i}(\boldsymbol{x}(t)) = 0, \qquad \forall i \neq 0; \\
&\Psi(\boldsymbol{x}(t_f)) = 0; \\
&h_i(\boldsymbol{x}(t)) \leq 0; \\
&\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

که در آن $\boldsymbol{x}$ متغیر پیوسته، $\mathbf{u}$ متغیر کنترل و tمتغیر گسسته می‌باشد. همچنین توابع

$$
\begin{aligned}
&g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \\
&Q_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \\
&f_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \\
&m_{i-1,i} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \\
&\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \\
&h_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{n_{n(i)}}
\end{aligned}
$$

به ترتیب هزینه نهایی، هزینه اجرایی، دینامیک سیستم، منیفلد سوییچ، شرایط نهایی و قیود نامساوی برای متغیرهای پیوسته است.

۳- ارائه یک روش برای حل مسائل کنترل بهینه سوییچ خودگردان با دنباله مد مجهول

در این نوع مسائل کنترل بهینه، معمولاً نه سکانس سوییچ و نه حتی تعداد سوییچ‌ها، از قبل مشخص نیست و بایستی به‌عنوان بخشی از جواب بهینه، تعیین گردند که منشان پیچیدگی‌های محاسباتی این نوع مسائل می‌باشد. پس می‌توان گفت به‌طورکلی، پارامترهای بهینه‌سازی این مسائل، کنترل ورودی، دنباله مد، زمان‌های سوییچ و تعداد آن‌ها می‌باشد. اگر در مسئله، دنباله مد مشخص باشد، کافی است کنترل ورودی و زمان‌های سوییچ محاسبه گردد. در مقالات به این نوع مسئله، مسئله‌ی بهینه‌سازی زمانی گفته می‌شود [۱۴].

در این مقاله، ما ابتدا با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات مسیر اولیه برای متغیرهای حالت مسئله جهت تعیین تعداد سوییچ‌ها و دنباله‌ی مد مسئله را به دست می‌آوریم. سپس با معلوم شدن دنباله مد مسئله، با مدل کردن مسئله کنترل بهینه سوییچ‌کننده به فرم یک مسئله کنترل بهینه معمولی، از یک رویکرد مستقیم با استفاده از روش رونوشت مستقیم استفاده می‌کنیم. لذا در این

www.SID.ir

Archive of SID

بخش ابتدا به توضیح مختصری از الگوریتم ازدحام ذرات و روش‌های رونوشت مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه می‌پردازیم.

۳-۱- الگوریتم ازدحام ذرات

بهینه‌سازی ازدحام ذرات یک روش محاسباتی مبتنی بر هوش جمعی است که در سال ۱۹۹۵ توسط کندی[1] (یک روانشناس اجتماعی) و ابرهات[2] (مهندس برق) انتشار یافت [۱۶ و ۱۷]. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) یک الگوریتم جستجو در میان جمعیت است که از رفتار اجتماعی پرندگان در درون دسته‌ای از پرندگان، الهام گرفته شده است. هدف اولیه از مفهوم ازدحام ذرات، شبیه‌سازی حرکات موزون و غیرقابل پیش‌بینی یک دسته پرنده بوده است. برای این کار الگوی پرواز آن‌ها برای پی بردن به چگونگی پرواز هماهنگ و تغییر جهت سریع آن‌ها به دست آورده‌اند و آن الگو به یک الگوریتم بهینه‌سازی ساده و کارآمد به‌نام بهینه‌سازی ازدحام ذرات تبدیل شده است. شکل کلی یک مسئله بهینه‌سازی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad f(x) \\ &s.to \quad g_i(x) \le 0, \qquad i = 1,\dots,m; \\ &\qquad\quad h_i(x) = 0, \qquad i = 1,\dots,k \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ و $f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. همچنین تابع f را تابع هدف مسئله و $\boldsymbol{x}$ را متغیر تصمیم گوییم. فرض کنید می‌خواهیم از روش PSO برای حل مسئله (۹) استفاده کنید. در این روش ابتدا تعدادی از نقاط فضای شدنی مسئله‌ی بهینه‌سازی به‌عنوان ذرات اولیه در نظر گرفته می‌شوند؛ سپس با استفاده از الگوی این روش در هر مرحله ذرات بهینه می‌شوند. این کار تا زمانی که یکی از شرط‌های توقف محقق گردد ادامه خواهد داشت. الگوی پرواز هر ذره با توجه به موقعیت ذرات دیگر تعیین می‌شود. فرض کنید $\boldsymbol{x}_i(t)$ بیانگر ذره iاُم در مرحله‌ی tاُم باشد. در این صورت نحوه به دست آوردن این ذره برای مرحله‌ی بعدی به‌صورت می‌باشد [۱۶]:

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{x}_i(t) + v_i(t+1)$$

می‌باشد [۱۶]، که در آن $\boldsymbol{x}_i(0) \in [\boldsymbol{x}_{\min}, \boldsymbol{x}_{\max}]$ است و $v_i(t+1)$ را بردار جابجایی[3] در مرحله $t+1$ می‌نامند. با توجه به بردار جابجایی دو نوع الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات زیر پدید

1- Kennedy
2- Eberhart
3- Velocity Vector

www.SID.ir

آمده است [۱۸ و ۱۹]:

۱) روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری[1]،

۲) روش ازدحام ذرات بهینه‌ی موضعی[2].

در ادامه به توضیح روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری که در این مقاله مورداستفاده قرار گرفته است، می‌پردازیم.

۳-۱-۱- روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری (gbest)

در روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری، همسایگی برای هر ذره شامل تمام ذرات مسئله می‌باشد. در واقع در این روش از اطلاعات اجتماعی بهترین موقعیت یافت شده در بین تمام ذرات ($\hat{y}(t)$) استفاده می‌شود. بردار جابجایی در این روش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t)[\hat{y}_{ij}(t) - x_{ij}(t)] \quad (10)$$

که در آن $v_{ij}(t)$ بردار جابجایی مؤلفه‌ی i اُم ذره j ام در مرحله t اُم می‌باشد و j می‌تواند یک عدد صحیح بین ۱ تا n_x باشد که در آن n_x بعد مسئله‌ی بهینه‌سازی است. هم‌چنین $x_{ij}(t)$ مؤلفه‌ی i اُم ذره j اُم در مرحله t اُم می‌باشد. پارامترها c_1 و c_2 ثابت‌های مثبتی هستند که میزان سهیم بودن مؤلفه‌های شخصی و اجتماعی را به ترتیب مشخص می‌کند. r_{1j} و r_{2j} اعداد تصادفی دلخواهی در بازه‌ی [۰،۱] هستند. $y_{ij}(t)$ بهترین موقعیتی است که x_{ij} از اولین مرحله تا مرحله‌ی t تجربه کرده است. منظور از بهترین موقعیت یعنی این‌که $f(y_i)$ بهینه‌ترین مقدار $f(x_i)$ تا این مرحله بوده است و $\hat{y}_j(t)$ مؤلفه‌ی jاُم موقعیت بهترین ذره از اولین مرحله تا مرحله‌ی t اُم در بین تمام ذرات می‌باشد، یعنی $f(\hat{y})$ بهترین مقدار تا این مرحله بوده است. جهت دریافت اطلاعات بیشتر در خصوص روش ازدحام ذرات به [۱۹-۲۲] مراجعه فرمایید.

۳-۲- روش رونوشت مستقیم ذوزنقه

یک دسته از روش‌های عددی مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه، روش‌های رونوشت مستقیم می‌باشد که خود به دو دسته موضعی و سراسری تبدیل می‌شوند. در روش رونوشت سراسری همانند روش‌های شبه طیفی توابع کنترل و حالت با یک تقریب سراسری در کل دامنه مسئله

1- Global Best PSO
2- Local Best PSO

www.SID.ir

Archive of SID

تقریب می‌شوند؛ اما در روش‌های رونوشت موضعی مانند روش اویلر، ذوزنقه و هرمیت سیمپسون توابع کنترل و حالت به‌صورت موضعی و محلی تقریب زده می‌شوند. این روش‌ها به‌طور مفصل در مرجع [۲۳] بیان شده است. ما در اینجا روش رونوشت موضعی ذوزنقه را توضیح می‌دهیم و در ادامه از آن برای حل یک دسته از مسائل کنترل بهینه ترکیبی استفاده می‌کنیم.

برای توضیح این روش مسئله کنترل بهینه زیر را که در بازه $[۰,۱]$ می‌باشد و هزینه آن به فرم مایر است، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\, J = \phi(x(۱)) \\ &s.to: \dot{x} = f(x(t),u(t),t), \qquad t \in [۰,۱]; \\ &\qquad C(x(t),u(t),t) \le ۰; \\ &\qquad \psi(x(۰),x(۱)) = ۰; \end{aligned} \tag{۱۰}$$

در این روش ابتدا بازه‌ی مسئله به‌صورت زیر به n قسمت مساوی تقسیم می‌شود:

$۰ = t_۱ < t_۲ < ... < t_n = ۱$ به‌طوری‌که

$$t_i = (i-۱)h, \qquad h = \frac{۱}{n-۱}\,.$$

حال در روش ذوزنقه معادلات دینامیکی با معادله تکرار روش ذوزنقه به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود؛ یعنی معادلات دینامیکی $\dot{x} = f(x(t),u(t),t)$ در نقاط گره‌ای $t_i, i = ۱,۲,...,n$ به‌صورت

$$x_{i+۱} = x_i + \frac{h}{۲}(f(x_i,u_i,t_i) + f(x_{i+۱},u_{i+۱},t_{i+۱}))$$

گسسته می‌شوند، که در آن $x_i = x(t_i)$ می‌باشد. هم‌چنین قیدهای مسیری $C(x(t),u(t),t) \le ۰$ را در نقاط گره‌ای به‌صورت

$$C(x_i,u_i,t_i) \le ۰, \qquad i = ۱,۲,...,n.$$

گسسته‌سازی می‌کنیم. شرایط مرزی مسئله نیز به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\psi(\boldsymbol{x}(\mathrm{t}_۰),\boldsymbol{x}(\mathrm{t}_n)) = ۰.$$

بنابراین مسئله کنترل بهینه (۱۲) به‌صورت مسئله بهینه‌سازی زیر رو نوشته می‌شود:

www.SID.ir

$$\begin{aligned} &\text{Min } J = \phi(x(t_0)) \\ &s.to:\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(f(x_i,u_i,t_i) + f(x_{i+1},u_{i+1},t_{i+1})); \\ &\quad C(x_i,u_i,t_i) \le 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n; \\ &\quad \psi(x(t_0),x(t_n)) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

۴- حل مسائل کنترل بهینه سوییچ خودگردان با دنباله مد مجهول

در این بخش از مقاله به ارائه یک روش برای حل مسائل کنترل بهینه سوییچ خودگردان با دنباله مد مجهول می‌پردازیم و در بخش پایانی، نتایج عددی برای حل یک نمونه از این مسائل ارائه می‌شود.

۴-۱- ارائه یک روش برای یافتن دنباله مد مسئله با استفاده از الگوریتم PSO

در این روش که مبتنی بر گسسته‌سازی تابع کنترل است بازه‌ی زمانی $[t_0, t_f]$ را به $n-1$ زیر بازه به‌صورت

$$t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t_f .$$

تقسیم می‌کنیم. بنابراین مقدار $\boldsymbol{u}$ در نقاط مذکور مجهول می‌باشد؛ به‌عبارت‌دیگر اگر $t_i, i = 1,2,\ldots,n$ نقاط گره‌ی باشند آنگاه بردار $[\boldsymbol{u}(t_1),\boldsymbol{u}(t_2),\ldots,\boldsymbol{u}(t_n)]$ مجهول می‌باشد که این بردار مجهول را با در نظر گرفتن $z_i = \boldsymbol{u}(t_i)$ به‌صورت $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین برای کنترل می‌توان نماد مناسب‌تر $\boldsymbol{u}(t,z) = \boldsymbol{u}(t,z_1,z_2,,,\ldots z_n)$ را به کاربرد. با این عمل مقدمات تبدیل مسئله کنترل بهینه سوییچ خودگردان به یک مسئله بهینه‌سازی فراهم می‌گردد. حال ادامه روش که محاسبه بردار پارامترهای مجهول $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ می‌باشد را در دو گام الف و ب توضیح می‌دهیم.

گام الف: در این گام با قرار دادن $\boldsymbol{u}(t,z)$ در معادلات حالت مسئله کنترل بهینه و سپس حل آن، متغیر حالت متناظر با آن کنترل را به دست می‌آوریم. البته باید توجه شود که در مسائل سوییچ خودگردان در هر ناحیه یک دسته معادلات دینامیکی برقرار است؛ به همین دلیل ابتدا باید مشخص شود که کدام زیرسیستم فعال است. در واقع در این قسمت از روش هر بار که $\boldsymbol{u}_k(t,z)$ و $\boldsymbol{x}_k$ داده می‌شود و می‌خواهیم $\boldsymbol{x}_{k+1}$ را بیابیم، ابتدا مشخص می‌کنیم که $\boldsymbol{x}_k$ در چه ناحیه‌ای قرار دارد و با توجه به ناحیه، وضعیت را انتخاب می‌کنیم و آنگاه با توجه به آن وضعیت $\boldsymbol{x}_{k+1}$ را از روی $\boldsymbol{x}_k$ استخراج می‌کنیم.

www.SID.ir

Archive of SID

گام ب: در این گام برای حل مسئله بهینه‌سازی به‌دست‌آمده از گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه، از الگوریتم PSO استفاده می‌کنیم. در زیر نحوه به‌کارگیری این الگوریتم را توضیح می‌دهیم.

از آن‌جاکه پارامترهای مجهول به‌صورت $\{\boldsymbol{u}(t_1), \boldsymbol{u}(t_2)\ldots, \boldsymbol{u}(t_n)\}$ می‌باشد، با در نظر گرفتن $g_i = \{\boldsymbol{u}(t_1), \boldsymbol{u}(t_2), \ldots, \boldsymbol{u}(t_n)\}$ به‌عنوان موقعیت یک‌ذره، از الگوریتم PSO برای به دست آوردن این مجهولات استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا تعداد n_{pop} ذره (متغیر کنترل) که هر کدام با فرض $\boldsymbol{u}(t_j) = g^j$ به‌صورت $g_i = (g_i^1, g_i^2, \ldots, g_i^n)$ می‌باشد، به‌عنوان جواب مسئله در نظر می‌گیریم که در آن g_i ذره‌ی iاُم در جمعیت ذرات می‌باشد را در شروع کار نحوه انتخاب کردن متغیرهای کنترل به‌صورت تصادفی و در فضای قابل‌قبول صورت می‌گیرد. اگر فرض کنیم در مرحله‌ی (تکرار) kاُم قرار داریم. جمعیت در مرحله kاُم به‌صورت

$$p(k) = \{g_1(k), g_2(k), \ldots g_{pop}(k)\}. \qquad (۱۲)$$

می‌باشد. برای هر کدام از این ذرات که معادل متغیر کنترل برای مسئله می‌باشند، با توجه به گام الف، متغیر حالت متناظر را به دست آورده و متغیر به‌دست‌آمده در تکرار kام برای ذره g_i را با $\boldsymbol{x}_i(k)$ نشان می‌دهیم. حال تابع برازندگی را به‌صورت تابعی هزینه همراه با جریمه‌ی شرایط مرزی انتهایی به فرم

$$f(g_i) = J(g_i, \boldsymbol{x}_i, \mathrm{t}) + \mathrm{M}(\boldsymbol{x}_i(\mathrm{t}_f) - \boldsymbol{x}_f) \qquad (۱۳)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن M یک عدد حقیقی بزرگ به‌عنوان جریمه است. برازندگی هر کدام از g_iها توسط $f(g_i)$ محاسبه می‌شود. بدین ترتیب بهترین ذره شخصی g_i^{best} و بهترین ذره جمعی g^{best} به دست می‌آید. با توجه به این ذرات، بردار جابجایی اشاره شده در الگوریتم PSO که در بخش سوم برای هر ذره‌ی $g_i(k)$ به دست می‌آید را با $v_i(k)$ نشان می‌دهیم. حال طبق روابط گفته شده در زیر بخش ۳-۱-۱ داریم:

$$g_i(k+1) = g_i(k) + v_i(k).$$

بدین ترتیب یک جمعیت جدید از ذرات تشکیل می‌شود که به‌صورت

$$p(k+1) = \{g_1(k+1), g_2(k+1), \ldots, g_{n_{pop}}(k+1)\}$$

است. سپس برازندگی هر یک از ذرات جمعیت جدید را به دست می‌آوریم. اگر جمعیت جدید شرایط توقف را ایجاد کرد که الگوریتم پایان می‌پذیرد؛ در غیر این صورت موقعیت جدید ذرات

www.SID.ir

را به دست می‌آوریم و الگوریتم را ادامه می‌دهیم. این چرخه تا زمانی که شرایط توقف محقق نگردد ادامه پیدا می‌کند. در این مرحله با استفاده از روش PSO دنباله مد و تعداد سوییچ مسئله به دست می‌آید و مسئله به یک مسئله با دنباله مد معلوم تبدیل می‌شود؛ در ادامه رویکردی مستقیم برای حل این مسئله با استفاده از روش رونوشت مستقیم ارائه می‌شود.

۴-۲- روش رونوشت موضعی برای حل مسئله کنترل بهینه ترکیبی با دنباله مد معلوم

با معلوم بودن دنباله مد مسئله، حل یک مسئله کنترل بهینه ترکیبی با سوییچ خودگردان و دنباله مد معلوم در دست می‌باشد. برای حل این مسئله ابتدا آن را به فرم مسئله (۱۰) مدل می‌کنیم. برای تبدیل مسئله سوییچ خودگردان با دنباله معلوم، با فرض این‌که مسئله‌داری k سوییچ و زمان‌های سوییچ $t_1, t_2, \ldots, t_k$ باشد، ابتدا تمام بازه‌های $[t_i, t_{i+1}]$ را با استفاده از تبدیل‌های

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

به بازه $[0,1]$ انتقال می‌دهیم. با این انتقال و در نظر گرفتن x_{ij} به‌عنوان مؤلفه‌ی jام متغیر حالت در بازه‌ی iام، معادلات دینامیکی مسئله را به‌صورت

$$x_{ij} = (t_i - t_{i+1}) f_{qi}(\boldsymbol{x}_i, u_i, \tau), \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, k; \\ j = 1, 2, \ldots, N; \\ \tau \in [0,1]; \\ \boldsymbol{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iN}] \end{cases}$$

بازنویسی می‌کنیم. با استفاده از این روند مسئله کنترل بهینه ترکیبی با سوییچ خودگردان و دنباله مد معلوم به یک مسئله کنترل بهینه معمولی در بازه $[0,1]$ تبدیل می‌شود که برای حل آن از روش رونوشت موضعی ذوزنقه که در بخش پیشین بیان شده است، استفاده می‌کنیم.

۵- پیاده‌سازی

در این بخش با ارائه یک مثال، کارایی رویکرد ارائه‌شده برای حل مسائل کنترل بهینه با سوییچ خودگردان و دنباله مد مجهول را نشان می‌دهیم. کلیه پیاده‌سازی‌ها در محیط Matlab انجام شده است. از دستور ode45 برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه استفاده‌شده است. همچنین بهینه‌سازی در روش رونوشت مستقیم با استفاده از نسخه ۲,۱۳

www.SID.ir

Archive of SID

(a۲۰۱۳R) جعبه‌ابزار opti و دستور solve انجام شده است. در این مثال ناحیه به چهار حالت تقسیم و در هر یک از نواحی وضعیت سیستم به‌صورت خطی زیر اعمال می‌گردد [۲۴ و ۲۵]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_q \boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}_q$$

جای‌که:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -0/5 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} -0/5 & -5 \\ 1 & -0/5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و حالت‌های متفاوت از انتخاب متناظر متغیر $q \in Q = \{1,2,3,4\}$ ناشی می‌شوند. سیستم باید از نقطه اولیه $\boldsymbol{x}_0 = (-8,-6)$ به نقطه نهایی $\boldsymbol{x}_e = (0,0)$ هدایت شود به‌طوری‌که هزینه حرکت کمینه شود. برای هر ناحیه q، تابع هزینه به فرم $\Phi_q = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + u_q^2)$ است و متغیر کنترل در تمام نواحی گسسته محدود به $-10 \le u_q(t) \le 10$ می‌باشد. همچنین نواحی به‌صورت زیر مشخص شده است:

$$h_1 = \begin{cases} x_1 + 5 \le 0 \\ -x_1 - 6 \le 0 \\ -x_1 - 10 \le 0 \end{cases},\ h_2 = \begin{cases} x_1 + 2 \le 0 \\ -x_2 - 5 \le 0 \\ -x_1 - x_1 \le 0 \\ -x_2 - 2 \le 0 \\ x_1 - 10 \le 0 \end{cases},\ h_3 = \begin{cases} -x_1 - 5 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ -x_2 + 2 \le 0 \\ -x_2 - 6 \le 0 \\ x_1 - 5 \le 0 \end{cases},\ h_4 = \begin{cases} x_1 - 5 \le 0 \\ x_2 - 2 \le 0 \\ -x_1 - 2 \le 0 \\ -x_2 - 2 \le 0 \end{cases}.$$

سوییچ‌ها نیز با توجه به مرز مشترک نواحی (منیفلدهای سوییچ) رخ می‌دهند که در این مثال به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= m_{2,1} = x_2 + 5 = 0; \\ m_{2,3} &= m_{3,2} = x_1 - x_2 = 0; \\ m_{1,3} &= m_{3,1} = x_1 + 5 = 0; \\ m_{3,4} &= m_{4,3} = x_2 + 2 = 0; \\ m_{2,4} &= m_{4,2} = x_1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

قابل‌ذکر است که در حل این مسئله دنباله مد و حتی تعداد سوییچ‌ها، مجهول در نظر گرفته شده‌اند. در این مثال محدودیت کنترل به‌صورت $|u| < 10$ می‌باشد به‌عبارتی $u_{\min} = -10$ و $u_{\max} = 10$ می‌باشند. همچنین شرایط مرزی اولیه و مرزی نهایی به‌صورت زیر هستند:

www.SID.ir

$$\boldsymbol{x}(۰) := \begin{bmatrix} x_۱(۰) \\ x_۲(۰) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ \\ -۶ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t_f) := \begin{bmatrix} x_۱(t_f) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

برای حل این مسئله ابتدا با در نظر گرفتن $n_{pop} = ۲۰$، $n = ۱۰$ و تابع برازندگی به‌صورت:

$$f(u) = J + ۱۰۰(\sqrt{(x_{۱,u}(t_f) - ۰)^۲ + (x_{۲,u}(t_f) - ۰)^۲}\ ) .$$

از الگوریتم PSO، به‌نحوی‌که در بخش ۴-۱ گفته شد، استفاده کرده‌ایم. در تابع برازندگی فوق، J همان تابعی هزینه مسئله است. همچنین شرایط توقف الگوریتم PSO برای حل این مسئله به‌صورت حداکثر تکرار برابر با ۳۰ لحاظ شده است. پارامترهای PSO استفاده شده همان‌هایی هستند که در مرجع [۱۶]. ذکر شده‌اند و اندازه جمعیت اولیه در این روش، ۲۵ در نظر گرفته‌شده است. نتایج حاصل از ۱۰ بار پیاده‌سازی الگوریتم PSO که در آن ۸ مورد دارای دنباله مد یکسان است، در جدول ۱ آورده شده است.

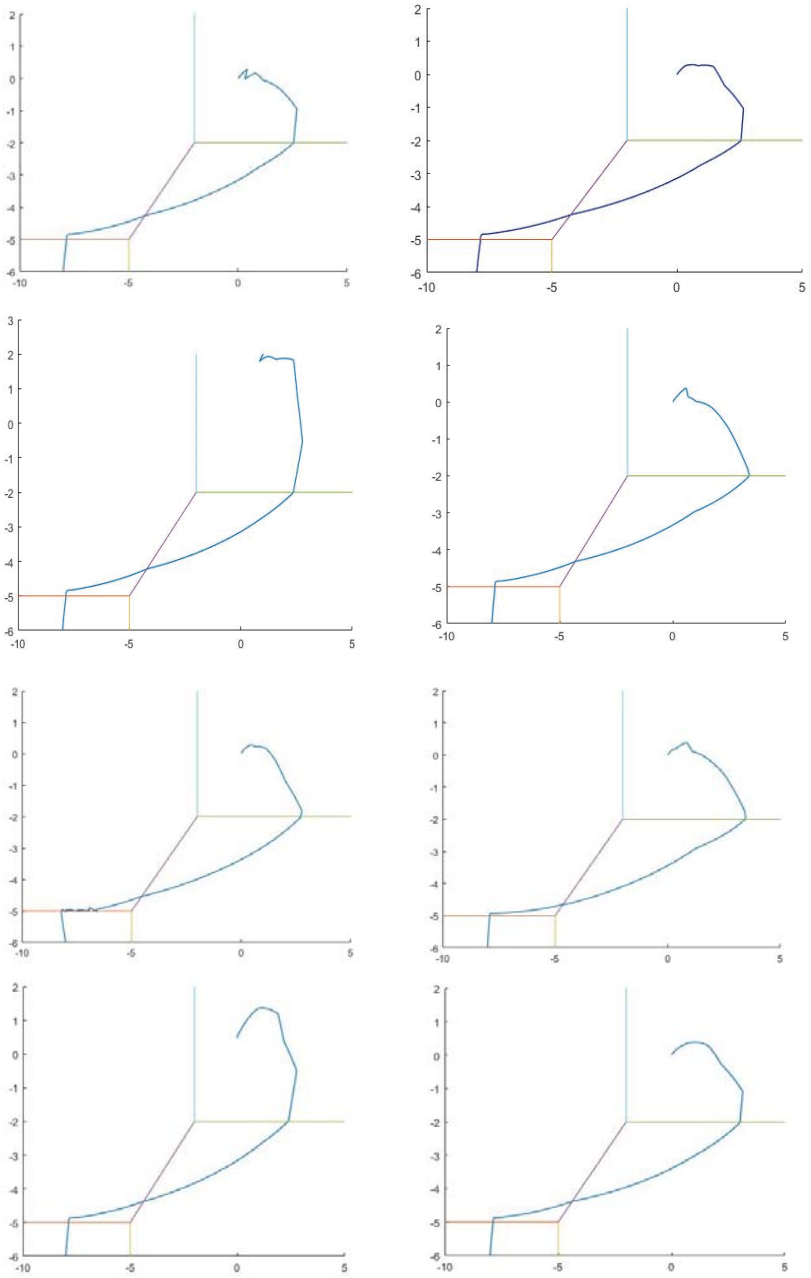
جدول (۱): نتایج حاصل از استفاده از الگوریتم **PSO** برای یافتن ساختار و دنباله مد مسئله در ۱۰ مرتبه پیاده‌سازی

	J_{opt} (مقدار بهین تابع هدف)	دنباله مد به‌دست‌آمده
۱	۲۴/۲۴	(۱,۲,۳,۴)
۲	۲۷/۲۲	(۱,۲,۳,۴)
۳	۲۲/۹۰	(۱,۲,۳,۴)
۴	۲۱/۸۳	(۱,۲,۳,۴)
۵	۲۳/۳۱	(۱,۲,۳,۴)
۶	۲۸/۶۳	(۱,۳,۴)
۷	۲۱/۹۲	(۱,۲,۳,۴)
۸	۲۶/۴۵	(۱,۳,۴)
۹	۲۲/۱۵	(۱,۲,۳,۴)
۱۰	۲۱/۸۰	(۱,۲,۳,۴)

همچنین نتایج حاصل از پیاده‌سازی‌ها (شکل ۳) نشان می‌دهد دنباله مد مسئله به‌صورت (۱,۲,۳,۴) است.

www.SID.ir

Archive of SID



شکل (۳): نتایج حاصل از استفاده از الگوریتم **PSO** برای یافتن ساختار و دنباله مد مسئله

www.SID.ir

Archive of SID

با تعیین دنباله مد مسئله از مرحله‌ی قبل، واضح است که مسئله با دنباله‌ی مد (۱,۲,۳,۴)، دارای سه سوییچ می‌باشد، با فرض این‌که زمان‌های سوییچ مسئله $\{t_1, t_2, t_3\}$ باشند، این زمان‌ها می‌بایست به‌عنوان مجهولات مسئله محاسبه شوند. برای حل مسئله در این مرحله از روش رونوشت استفاده می‌کنیم؛ برای این کار ابتدا بازه‌های $[0, t_1]$، $[t_1, t_2]$، $[t_2, t_3]$ و $[t_3, 2]$ را به بازه $[0,1]$ انتقال می‌دهیم. با این انتقال و در نظر گرفتن x_{ij} به‌عنوان مؤلفه‌ی j ام متغیر حالت در بازه‌ی i ام مسئله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\min J = \int_0^1 \frac{1}{2}(t_1(x_{11}^2 + x_{12}^2 + u_1^2) + (t_2 - t_1)(x_{21}^2 + x_{22}^2 + u_2^2) + (t_3 - t_2)(x_{31}^2 + x_{32}^2 + u_3^2) + (2 - t_3)(x_{41}^2 + x_{42}^2 + u_4^2))\,d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{11}(\tau) = t_1(-x_{11} + 2x_{21} + u_1);\\
&\dot{x}_{12}(\tau) = t_1(-2x_{11} - 2x_{21} + u_1);\\
&\dot{x}_{21}(\tau) = (t_2 - t_1)(-x_{21} - 2x_{22} + u_2);\\
&\dot{x}_{22}(\tau) = (t_2 - t_1)(x_{21} - 0/5x_{22} + u_2);\\
&\dot{x}_{31}(\tau) = (t_3 - t_2)(-0/5x_{31} - 5x_{32} + u_3);\\
&\dot{x}_{32}(\tau) = (t_3 - t_2)(x_{31} - 0/5x_{32} + u_3);\\
&\dot{x}_{41}(\tau) = (2 - t_3)(-x_{41} + u_4);\\
&\dot{x}_{41}(\tau) = (2 - t_3)(2x_{41} - x_{42} + u_4);
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} - 10 \le 0;\\ x_{11} + 5 \le 0;\\ -x_{12} + 5 \le 0;\\ -x_{22} + 5 \le 0;\\ -x_{22} - 5 \le 0;\\ x_{21} - x_{22} \le 0;\\ x_{21} + 2 \le 0;\\ x_{22} - 2 \le 0;\\ -x_{21} - 10 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x_{31} - 5 \le 0;\\ -x_{31} - x_{32} \le 0;\\ x_{32} + 2 \le 0;\\ -x_{32} - 6 \le 0;\\ x_{31} - 5 \le 0;\\ x_{41} - 5 \le 0;\\ x_{42} - 2 \le 0;\\ -x_{42} - 2 \le 0;\\ -x_{41} - 2 \le 0; \end{cases} , \quad \begin{cases} x_{21}(1) + 5 = 0;\\ x_{21}(1) - x_{22}(1) = 0;\\ x_{32}(1) + 2 = 0;\\ x_{41}(1) = x_{42}(1) = 0;\\ x_{12}(1) = -8;\\ x_{21}(1) = -6;\\ x_{21}(0) = x_{22}(0);\\ x_{21}(0) = x_{31}(0);\\ x_{22}(0) = x_{32}(0); \end{cases} \quad \begin{cases} x_{31}(0) = x_{41}(0);\\ x_{32}(0) = x_{42}(0);\\ -x_{32} - 6 \le 0;\\ -10 \le u_1(\tau) \le 10;\\ -10 \le u_2(\tau) \le 10;\\ -10 \le u_3(\tau) \le 10. \end{cases}$$

همچنین تابع هدف مسئله را با معرفی متغیر x_5 به‌صورت:

www.SID.ir

Archive of SID

$$x_5 = \frac{1}{2}(t_1(x_{11}^2 + x_{12}^2 + u_1^2) + (t_2 - t_1)(x_{21}^2 + x_{22}^2 + u_2^2) + (t_3 - t_2)(x_{31}^2 + x_{32}^2 + u_3^2) + (2 - t_3)(x_{41}^2 + x_{42}^2 + u_4^2))$$

را با شرط اولیه $x_5(0) = 0$، می‌توان به فرم مایر $J = x_5(1)$ نوشت که این امر از محاسبه انتگرال در حل مسئله جلوگیری کرده و به لحاظ محاسباتی به‌صرفه می‌باشد. توجه شود که زمان های t_1، t_2 و t_3 جز پارامترهای مجهول در نظر گرفته می‌شوند. با پیاده‌سازی روش ذوزنقه بیان شده در بخش ۳-۲ به ازای مقادیر مختلف برای تعداد نقاط گسسته‌سازی n، نتایج جدول زیر برای زمان‌های t_1، t_2 و t_3 و تابع هدف حاصل شده است.

جدول (۲): جواب‌های حاصل از روش رونوشت ذوزنقه به ازای $n = 10, 20, 50$

J_{opt}	t_{3opt}	t_{2opt}	t_{1opt}	n
۲۱/۷۱۹۶	۰/۵۶۷۲	۰/۳۸۵۶	۰/۱۹۰۶	۱۰
۲۱/۷۰۳۶	۰/۵۶۷۲	۰/۳۸۵۶	۰/۱۹۰۶	۲۰
۲۱/۶۹۵۸	۰/۵۶۷۲	۰/۳۸۵۶	۰/۱۹۰۶	۵۰

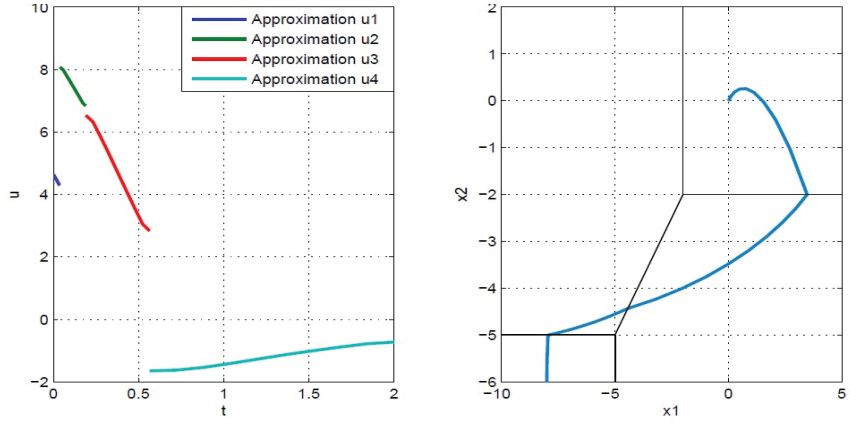
در ادامه نمودار جواب‌های تقریبی توابع حالت x_1 و x_2 و تابع کنترل $u(t)$ به‌دست‌آمده از روش ذوزنقه به ازای $n = 20$ در شکل ۴ گزارش شده است. شکل ۵، نتایج به‌دست‌آمده برای این مثال در مرجع [۲۵] را نمایش می‌دهد که مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده، نمایانگر منطبق بودن متغیرهای حالت و زمان مسئله در دو روش است. لازم به ذکر است که در مرجع [۲۵] از استخراج شرایط لازم بهینگی و یک جستجوی درختی استفاده شده است که از معایب آن می‌توان به پیچیدگی استخراج شرایط لازم بهینگی و شرط حداکثر تعداد مجاز برای سوییچ اشاره کرد (در این مرجع حداکثر تعداد سوییچ مجاز ۵ در نظر گرفته شده است).

نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که روش ارائه‌شده برای حل مسائل کنترل بهینه ترکیبی با سوییچ خودگردان و دنباله مد مجهول موفق عمل می‌کند. همچنین از مزیت‌های این روش می‌توان به عدم نیاز به استخراج شرایط لازم بهینگی که برای مسائل سوییچ خودگران م شکل ا ست، ا شاره کرد. همچنین تنک بودن[1] NLP[2] حا صل از مرحله‌ی دوم روش باعث می شود [۲۳] که بتوان آن را با سرعت‌بالا حل کرد و این امر برای مسائل با تعداد نقاط سوییچ زیاد که برای دقت کافی به تعداد نقاط گره‌ی بیشتری نیاز دارند، مفید می‌باشد.

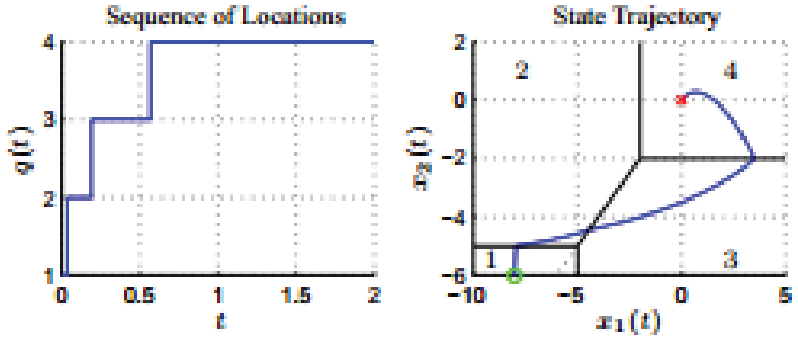
1- Sparse
2- Nonlinear Programming

www.SID.ir

Archive of SID



شکل (۴): نمودار جواب‌های تقریبی برای توابع حالت و کنترل به‌دست‌آمده از پیاده‌سازی روش ذوزنقه به ازای $n = ۲۰$



شکل (۵): نتایج به‌دست‌آمده در مرجع [۲۵]

نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که روش ارائه‌شده برای حل مسائل کنترل بهینه ترکیبی با سوییچ خودگردان و دنباله مد مجهول موفق عمل می‌کند. همچنین از مزیت‌های این روش می‌توان به عدم نیاز به استخراج شرایط لازم بهینگی که برای مسائل سوییچ خودگران م شکل ا ست، ا شاره کرد. همچنین تنک بودن[1] NLP[2] حا صل از مرحله‌ی دوم روش باعث می

1- Sparse
2- Nonlinear Programming

www.SID.ir

Archive of SID

شود [۲۳] که بتوان آن را با سرعت‌بالا حل کرد و این امر برای مسائل با تعداد نقاط سوییچ زیاد که برای دقت کافی به تعداد نقاط گره‌ی بیشتری نیاز دارند، مفید می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای حل مسائل کنترل بهینه ترکیبی با سوییچ خودگردان و دنباله مد مجهول ارائه‌شده است که در آن از الگوریتم PSO جهت تعیین ساختار، دنباله مد و تعداد سوییچ مسئله استفاده شده است و سپس با مدل کردن مسئله سوییچ خودگردان با دنباله مد معلوم به فرم یک مسئله کنترل بهینه‌ی معمولی، به حل آن با استفاده از یک رویکرد مستقیم پرداخته‌ایم. نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که الگوریتم PSO برای حل مسئله کنترل بهینه ترکیبی سوییچ خودگردان با دنباله مد نامشخص موفق عمل می‌کند. نقطه‌ی قوت این روش در عدم نیاز به شناخت قبلی نسبت به ساختار جواب مسئله و تعداد سوییچ‌ها و دنباله مد می‌باشد.

منابع

[1] Witsenhausen, H. (1966). A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **11**, 161-167.

[2] Liberzon, D. (2012). Switching in systems and control. *Springer Science & Business Media*.

[3] Eich-Soellner, E. and Führer, C. (1998). Numerical methods in multibody dynamics, *Stuttgart: Teubner*.

[4] Böhme, T. J. and Frank, B. (2017). Hybrid systems and hybrid optimal control. In *Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles* Springer, Cham, 79-115.

[5] Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2014). Hybrid dynamical systems: An introduction to control and verification. *Foundations and Trends in Systems and Control*, **1**, 1-172

[6] Wu, X., Zhang, K. and Sun, C. (2015). Constrained optimal control of switched systems and its application. *Optimization*, **64**, 539-557.

[7] Liu, X. and Stechlinski, P. (2017). Hybrid and Switched Systems. In *Infectious Disease Modeling*, Springer, Cham, 21-39.

[8] Hamann, P. and Mehrmann, V. (2008). Numerical solution of hybrid systems of differential-algebraic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 693-705.

www.SID.ir

Archive of SID

[9] Yu, M., Wang, L, Chu, T. and Xie, G. (2004, December). Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach. *In Decision and Control*, 2004. CDC. 43rd *IEEE Conference on*, **4**, 3539-3544.

[10] Kröger, T. (2010). Hybrid switched-system control for robotic systems. *In On-Line Trajectory Generation in Robotic Systems, Springer, Berlin, Heidelberg*, 105-135.

[11] Filippov, A. F. (1960). Differential equations with discontinuous right-hand side. *Matematicheskii sbornik,* **93**, 99-128.

[12] Xu, X. and Antsaklis, P. J. (2004). Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants. *IEEE transactions on automatic control,* 49(1), 2-16.

[13] Kirk, D. E. (2012). Optimal control theory: an introduction. *Courier Corporation.*

[14] Flaßkamp, K. Murphey, T. and Ober-Blöbaum, S. (2012, December). Switching time optimization in discretized hybrid dynamical systems. *In Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on IEEE,* 707-712.

[15] Passenberg, B. Caines, P. E. Sobotka, M. Stursberg, O. and Buss, M. (2010, December). The minimum principle for hybrid systems with partitioned state space and unspecified discrete state sequence. *In Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference* on, IEEE*,* 6666-6673.

[16] Kennedy, J. (2011). Particle swarm optimization. *In Encyclopedia of machine learning, Springer US,* 760-766.

[17] Clerc, M. and Kennedy, J. (2002). The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE transactions on Evolutionary Computation,* **6**, 58-73

[18] Borrelli, F. (2003). Constrained optimal control of linear and hybrid systems, **290**. *Springer.*

[19] Eberhart, R. and Kennedy, J. (1995, October). A new optimizer using particle swarm theory. *In Micro Machine and Human Science,Proceedings of the Sixth International Symposium on*, 39-43*, IEEE*

[20] Krink, T. VesterstrOm, J.S. and Riget, J. (2002). Particle swarm optimisation with spatial particle extension. *In Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on*, **2**, 1474-1479. *IEEE.*

www.SID.ir

Archive of SID

[21] Eberhart, R. Simpson, P. and Dobbins, R. (1996). Computational intelligence PC tools. *Academic Press Professional, Inc.*

[22] Fulcher, J. (2008). Computational intelligence: an introduction. *In Computational intelligence: a Compendium, Springer, Berlin, Heidelberg,* 3-78.

[23] Betts J, T. (2010), Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming, **19**, *Siam.*

[24] Passenberg, B. (2012). Theory and algorithms for indirect methods in optimal control of hybrid systems. *PhD thesis, Technical University of Munich.*

[25] Passenberg, B. and Stursberg, O. (2019). Graph search for optimizing the discrete location sequence in hybrid optimal control. *IFAC Proceedings Volumes*, **42**, 304-309.

www.SID.ir

Archive of SID

Modeling and Solving Problems of Optimal Control of Hybrid Systems with Autonomous Switches Using Particle Swarm Optimization and Direct Transcription Methods

Zeynab Dalvand[*], Mostafa Shamsi[**], Masoud Hajarian[*]

[*]Department of Applied and Industrial Mathematics, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

[**]Department of Mathematics, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, it is focused on a specific category of hybrid optimal control problems with autonomous systems. Because of existence of continuous and discrete dynamic, the numerical solutions of hybrid optimal control are not simple. The numerical direct and indirect methods presented for solving optimal control of hybrid systems have drawbacks due to sensitivity to initial guess and the inability of finding a global minimum solution. Meta-heuristic methods have been proposed. In this method, Meta-heuristic methods (e.g. using PSO) is used to determine the mode sequence, and by the attention to the prescribed the mode sequence, a problem with a determinate mode sequence is obtained, and then the switching times, the optimal value of the target function and the state and control are estimated by using the direct approach. Actually, using the proposed model, we will eliminate basic challenges of solving optimal control of hybrid autonomous systems problems, in which the number of switches and mood sequence are unknown .Finally, numerical results for solving an example presented.

Keywords: Optimal control, Hybrid system, Autonomous switch, Heuristic methods, Particle Swarm Algorithm, Switch points, Mode sequence, Mayer form of objective function.

Subject Classification (2010): 49J15, 78M32.

www.SID.ir