

## مدل‌سازی و حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با دنباله مد نامعلوم با استفاده از بهینه‌سازی ازدحام ذرات و روش رونوشت مستقیم

زینب دالوند\*، مصطفی شمس‌ی\*\* و مسعود حجاریان<sup>۱</sup>\*

\*گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی

\*\*گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۵

**چکیده:** در این مقاله بر روی دسته خاصی از مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با سویچ خودگردان تمرکز می‌گردد. حل عددی مسائل کنترل بهینه سویچ خودگردان، به علت تعامل میان دینامیک پیوسته و گسسته، ساده نیست و روش‌های عددی مستقیم و غیرمستقیم ارائه شده دارای ایرادهایی، از جمله حساسیت نسبت به حدس اولیه و ناتوانی در یافتن جواب کمینه سراسری می‌باشند. در این مقاله برای برطرف کردن این مشکلات، کاربرد روش‌های فرا ابتکاری پیشنهاد می‌شوند. در این روش ابتدا از این نوع روش‌ها (به‌عنوان مثال، روش PSO) جهت تعیین دنباله مد مسئله استفاده می‌شود؛ سپس با توجه به دنباله مد تعیین شده، یک مسئله با دنباله مد معلوم به دست می‌آید و در نهایت با استفاده از روش رونوشت مستقیم ذوزنقه زمان‌های سویچ، مقدار بهین تابع هدف و متغیرهای حالت و کنترل برآورد می‌شوند. در واقع با ارائه این روش به رفع چالش‌های اساسی حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با سویچ خودگردان که در آن‌ها تعداد سویچ و دنباله مد مجهول است، می‌پردازیم. در پایان نتایج عددی برای یک مثال ارائه می‌شود.

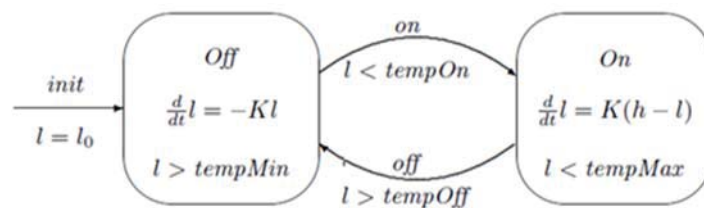
**واژه‌های کلیدی:** کنترل بهینه، سیستم ترکیبی، سویچ خودگردان، الگوریتم ازدحام ذرات، دنباله مد، نقاط سویچ، فرم مایر تابع هدف.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۴۹J۱۵، ۷۸M۳۲.

۱- مقدمه

به‌طور کلی واژه «هیبرید» به‌عنوان صفت، به معنای چیزی است که حاصل تلفیق دو خاصیت (دو ماده، دو سیستم، دو رفتار) نامتجانس با یکدیگر می‌باشد. لذا سیستم‌هایی که از دو جزء متفاوت تشکیل شده باشند، هیبرید یا ترکیبی نامیده می‌شوند. سیستم‌های ترکیبی به‌طور هم‌زمان، دربرگیرنده متغیرهای پیوسته و گسسته می‌باشند. در نظریه سیستم‌های دینامیکی بسیاری از متون، سیستم‌های ترکیبی را، تلفیق سیستم‌های حالت-پیوسته و سیستم‌های رویداد-گسسته نامیده‌اند [۱]. از نقطه‌نظر تاریخی ظاهراً قدیمی‌ترین مرجعی که در آن به سیستم ترکیبی به مفهوم سیستمی شامل دینامیک‌های گسسته و پیوسته اشاره شده است، مرجع [۱] می‌باشد که در سال ۱۹۶۶ منتشر شده است.

بسیاری از پدیده‌هایی که هر روز با آن سروکار داریم در زمره سیستم‌های ترکیبی قرار می‌گیرند. یک مثال رایج از سیستم‌های ترکیبی، سیستم کنترل دما است (سیستم ترموستات) که از یک گرم‌کننده و یک ترموستات تشکیل شده است. چنین سیستم‌هایی می‌توانند در دو مد، وابسته به این‌که گرم‌کننده روشن یا خاموش باشد، عمل کنند. همچنین دمای اتاق مطابق با معادلات دیفرانسیل تغییر می‌کند. متغیرهای سیستم، دما و مد عملیاتی گرم‌کن است که مسلماً بین این دو متغیر ارتباط وجود دارد. هنگام کنترل درجه‌ی اتاق با یک ترموستات و یک سیستم گرمایشی، زمانی که اتاق به‌اندازه کافی گرم شود. با فرمان ترموستات سیستم گرمایشی قطع می‌گردد و مد گرم‌کن از روشن به خاموش تغییر می‌کند. زمانی که دما به درجه‌ای مشخص برسد، سیستم گرمایشی دوباره وصل شده و دما را بالا می‌برد. در هر کدام از حالت‌های فوق، با دینامیک‌های مختلفی سروکار داریم. در شکل ۱ نمایی از یک سیستم ترموستات نشان داده شده است که بین دو مد خاموش و روشن عمل می‌کند [۲].



شکل (۱): نمایی از یک سیستم ترموستات

## ۲- کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی

یکی از مباحثی که در مطالعات مربوط به سیستم‌های ترکیبی مورد توجه قرار گرفته است، مبحث کنترل بهینه می‌باشد. در مسائل کنترل بهینه ترکیبی، سیستم‌های ترکیبی بر اساس دینامیکی پیوسته و گسسته، به حالت‌های پیوسته و گسسته با کنترل‌های پیوسته و گسسته، مدل شده‌اند. در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی روی مباحث کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی انجام شده است [۳-۵]. مسائل ترکیبی در دسته‌های مختلفی قرار می‌گیرند که از جمله آن‌ها می‌توان به مسائل کنترل بهینه سیستم‌های سویچ کننده، سیستم‌های ترکیبی با سویچ خودگردان و سیستم‌های عدد صحیح آمیخته اشاره کرد. در این مقاله حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های ترکیبی با سویچ خودگردان مدنظر است که در ادامه به شرح مدل ریاضی این مسائل و مثال‌های از آن‌ها پرداخته شده است.

### ۲-۱- مسائل کنترل بهینه سیستم سویچ کننده

یک دسته مهم از سیستم‌های ترکیبی، سیستم‌های سویچ کننده هستند؛ رفتار دینامیکی آن‌ها توسط تعداد محدودی مدل دینامیکی به همراه مجموعه‌ای از قواعد، برای سویچ بین آن‌ها توصیف می‌شود و مدل دینامیکی سیستم توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شود. بسیاری از مسائل کنترلی را می‌توان در چهارچوب سیستم‌های سویچ کننده فرمول بندی کرد. به عنوان نمونه می‌توان به سیستم مکانیکی همراه با اصطکاک، بازوی مکانیکی ربات، جعبه دنده یا گیربکس خودکار، مدارهای الکتریکی که در آن‌ها وسایل گوناگون در دامنه‌های فرکانسی متفاوت به کار برده می‌شود، مدارهای شامل دیود یا سویچ الکترونی و غیره اشاره نمود [۳-۱۰]. علاوه بر این دینامیک‌های پیچیده غیرخطی را می‌توان به چندین مد عملیاتی تجزیه کرد تا یک سیستم سویچ کننده حاصل شود؛ در این صورت آنالیز و طراحی سیستم ساده‌تر می‌گردد [۱۱]. در ادامه به بیان مدل ریاضی این مسائل می‌پردازیم.

### ۲-۱-۱- مدل ریاضی مسئله کنترل بهینه یک سیستم سویچ کننده

در این مسائل، با فرض این که سیستم دارای  $n_q$  زیرسیستم باشد، سیستم دینامیکی، با معادلات دیفرانسیلی زیر توصیف می‌گردد [۱۲]:

$$\dot{x} = f_q(x(t), u(t), t), \quad q \in Q = \{1, 2, \dots, n_q\} \quad t \in [0, t] \quad (1)$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^N$  متغیر حالت پیوسته و  $u \in \mathbb{R}^M$  کنترل ورودی سیستم می باشند. برای هر مد  $q \in Q$  تابع  $f_q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  میدان برداری است که دینامیک سیستم در آن مد را توصیف می کند. سیگنال سوئیچ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma = \{(t_0, q_0), (t_1, q_1), \dots, (t_n, q_n)\} \quad (2)$$

که در آن  $n \in \mathbb{N}$  تعداد سوئیچ ها و  $t_0, t_1, \dots, t_n$  زمان های سوئیچ هستند به طوری که  $\{(t_0, t_1, \dots, t_n)\}$  همچنین  $q_i \in Q, i = 0, 1, \dots, n$  و  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = t_f$  دنباله ی زمان های سوئیچ و  $\{(q_0, q_1, \dots, q_n)\}$  دنباله مد یا سکانس سوئیچ نامیده می شوند. بر اساس سکانس سوئیچ، معادلات دینامیکی سیستم به صورت زیر قابل بیان است.

$$\dot{x}(t) = f_{q_i}(x(t), u(t), t) \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (3)$$

در واقع زوج مرتب  $(t_i, q_i)$  بیانگر آن است که در زمان سوئیچ  $t_i$ ، دینامیک سیستم از مد  $q_{i-1}$  به مد  $q_i$  تغییر می یابد و در بازه زمانی  $[t_i, t_{i+1})$  دینامیک  $f_{q_i}$  برقرار است. متغیر حالت  $x(t)$  ممکن است در زمان های سوئیچ به صورت پیوسته بوده یا پرش داشته باشد که در این دو حالت از شرایط زیر برای بیان رابطه میان  $x(t^+)$  و  $x(t^-)$  استفاده می شود؛ اگر متغیر حالت پیوسته باشد شرط  $x(t^-) = x(t^+)$  برقرار است و اگر در زمان سوئیچ، پرش رخ دهد از شرط زیر استفاده می شود:

$$x(t_i^+) = \rho_{(p_i, p_{i+1})}(x(t_i^-)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

جایی که تابع  $\rho_{(p_i, p_{i+1})} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  تابع شروع مجدد،  $x(t^+)$  و  $x(t^-)$  به ترتیب مقدار متغیر حالت دقیقاً بلافاصله بعد و قبل از زمان سوئیچ هستند. شرط اولیه مسئله به صورت زیر است:

$$x(t_0) = x_0 \quad (5)$$

فرض می کنیم متغیر حالت پیوسته و ورودی کنترل در قید مسیر زیر صدق کنند.

$$h_j(x(t), u(t)) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, N_c \quad t \in [t_0, t_f] \quad (6)$$

تابعی معیار را به صورت زیر تعریف می گردد:

$$J[\sigma, \mathbf{u}] = \Psi(\mathbf{x}(t_{n+1})) + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_{q_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (7)$$

لازم به ذکر است که به طور کلی در مسائل کنترل بهینه تابع هزینه به یکی از سه صورت زیر قابل بیان است:

(۱) تابع هزینه به فرم مایر<sup>۱</sup>

(۲) تابع هزینه به فرم بولزا<sup>۲</sup>

(۳) تابع هزینه به فرم لاگرانژ

در فرم مایر، تابع هزینه تابعی از زمان نهایی مسئله به فرم زیر می باشد:

$$J = \Psi(\mathbf{x}(t_f))$$

فرم بولزا به صورت  $J = \Psi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_t^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$  و فرم لاگرانژ به صورت

$$J = \int_t^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

تعریف می شود که در آن  $\Psi$  هزینه نهایی و  $L$  هزینه انتگرالی می باشد. قابل ذکر است که فرم های لاگرانژ و بولزا قابل تغییر به فرم مایر هستند (جهت مطالعه بیشتر مرجع [۱۳] را مطالعه بفرمایید). با توجه به آنچه گفته شد، تابعی هدف (۷) از نوع بولزا می باشد که در این مقاله برای سادگی به فرم مایر تبدیل شده است.

در مسئله کنترل بهینه یک سیستم سویچ کننده، هدف یافتن سیگنال سویچ یا دنباله مد و ورودی کنترل است به طوری که معادلات (۳)، قیود مسیری (۶)، شرط اولیه (۵) و شرط پرش (۴) برقرار باشند و تابع معیار (۷) کمینه گردد.

## ۲-۲- مسئله کنترل بهینه سیستم ترکیبی با سویچ خودگردان

در برخی مسائل، سویچ راهکاری است که با منیفلدهای سویچ<sup>۳</sup> (مرزهای بین ناحیه های مختلف در فضای حالت) مشخص می شود. سویچ زمانی رخ می دهد که متغیر حالت به منیفلد سویچ برسد. برای مثال هنگامی که ارتفاع هواپیما به ارتفاع مشخصی می رسد از مد «افزایش»<sup>۴</sup> به مد

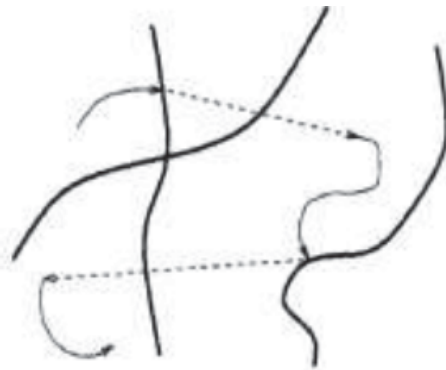
1- Mayer

2- Bolza

3- Switch manifolds

4- Climb

«عبور» سوئیچ می کند. به این سوئیچ، سوئیچ خودگردان گفته می شود [۱۴]. در شکل ۲ نمایی از یک سیستم سوئیچ خودگردان نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، فضای حالت به تعدادی ناحیه تقسیم شده است که مرز بین این ناحیه ها منیفلدهای سوئیچ نامیده می شود و زمانی که سیستم به منیفلدهای سوئیچ می رسد وضعیت سیستم تغییر می کند.



شکل (۲): نمایی از یک سیستم سوئیچ خودگردان

## ۲-۱-۲ مدل ریاضی مسئله کنترل بهینه سوئیچ خودگردان

در این مسائل فرض بر آن است که فضای حالت به تعدادی ناحیه  $\chi_i$  افزاز شده است به طوری که در هر کدام از نواحی، دینامیک مسئله به صورت زیر می باشد [۱۵]:

$$\dot{x} = f_i(x(t), u(t), t) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad q_i \in Q$$

که در آن  $t \in \mathbb{R}^+$ ، مجموعه اندیس نواحی است و برای هر  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  و  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ ،  $u(t) \in U_i \subseteq \mathbb{R}^M$ ،  $x(t) \in \chi_i \subseteq \mathbb{R}^N$ ، دینامیک سراسری سیستم هم به نواحی  $\chi_i$  و هم به دینامیک موضعی وابسته می باشد. در کل شکل هر کدام از نواحی می تواند به صورت دلخواه باشد. نواحی می توانند دارای مرز مشترک باشند، البته با این شرط که اندازه لبگ مرزهای مشترک برابر صفر باشد. فرض بر آن است که سیستم خوش تعریف باشد، به این معنی که برای هر حالت اولیه، مسیر یکتایی وجود داشته باشد. در مسائل کنترل بهینه با سوئیچ خودگردان هدف یافتن مسیری بهینه است به طوری که تابع معیار کمینه گردد. بدین ترتیب فرم کلی این مسائل را می توان به صورت زیر بیان کرد [۱۵]:

$$\begin{aligned}
\text{Min } J &= g(\mathbf{x}(t_f)) + \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_{q_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \\
\text{s.to: } \dot{\mathbf{x}}(t) &= f_{q_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n; \\
m_{i-1, i}(\mathbf{x}(t)) &= 0, \quad \forall i \neq 0; \\
\Psi(\mathbf{x}(t_f)) &= 0; \\
h_i(\mathbf{x}(t)) &\leq 0; \\
\mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{8}$$

که در آن  $\mathbf{x}$  متغیر پیوسته،  $\mathbf{u}$  متغیر کنترل و  $t$  متغیر گسسته می‌باشد. همچنین نوابع

$$\begin{aligned}
g: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}, \\
Q_i: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M &\rightarrow \mathbb{R}, \\
f_i: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M &\rightarrow \mathbb{R}, \\
m_{i-1, i}: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}, \\
\Psi: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}, \\
h_i: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^{n(i)}
\end{aligned}$$

به ترتیب هزینه نهایی، هزینه اجرایی، دینامیک سیستم، منیفلد سویچ، شرایط نهایی و قیود نامساوی برای متغیرهای پیوسته است.

### ۳- ارائه یک روش برای حل مسائل کنترل بهینه سویچ خودگردان با دنباله مد مجهول

در این نوع مسائل کنترل بهینه، معمولاً نه سکانس سویچ و نه حتی تعداد سویچ‌ها، از قبل مشخص نیست و بایستی به‌عنوان بخشی از جواب بهینه، تعیین گردند که نشان پیچیدگی‌های محاسباتی این نوع مسائل می‌باشد. پس می‌توان گفت به‌طور کلی، پارامترهای بهینه‌سازی این مسائل، کنترل ورودی، دنباله مد، زمان‌های سویچ و تعداد آن‌ها می‌باشد. اگر در مسئله، دنباله مد مشخص باشد، کافی است کنترل ورودی و زمان‌های سویچ محاسبه گردد. در مقالات به این نوع مسئله، مسئله بهینه‌سازی زمانی گفته می‌شود [۱۴].

در این مقاله، ما ابتدا با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات مسیر اولیه برای متغیرهای حالت مسئله جهت تعیین تعداد سویچ‌ها و دنباله‌ی مد مسئله را به دست می‌آوریم. سپس با معلوم شدن دنباله مد مسئله، با مدل کردن مسئله کنترل بهینه سویچ‌کننده به فرم یک مسئله کنترل بهینه معمولی، از یک رویکرد مستقیم با استفاده از روش رونوشت مستقیم استفاده می‌کنیم. لذا در این

بخش ابتدا به توضیح مختصری از الگوریتم ازدحام ذرات و روش‌های رونوشت مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه می‌پردازیم.

### ۳-۱- الگوریتم ازدحام ذرات

بهینه‌سازی ازدحام ذرات یک روش محاسباتی مبتنی بر هوش جمعی است که در سال ۱۹۹۵ توسط کندی<sup>۱</sup> (یک روانشناس اجتماعی) و ابرهات<sup>۲</sup> (مهندس برق) انتشار یافت [۱۶ و ۱۷]. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) یک الگوریتم جستجو در میان جمعیت است که از رفتار اجتماعی پرندگان در درون دسته‌ای از پرندگان، الهام گرفته شده است. هدف اولیه از مفهوم ازدحام ذرات، شبیه‌سازی حرکات موزون و غیرقابل پیش‌بینی یک دسته پرنده بوده است. برای این کار الگوی پرواز آن‌ها برای پی بردن به چگونگی پرواز هماهنگ و تغییر جهت سریع آن‌ها به دست آورده‌اند و آن الگو به یک الگوریتم بهینه‌سازی ساده و کارآمد به نام بهینه‌سازی ازدحام ذرات تبدیل شده است. شکل کلی یک مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) \\ \text{s.to } & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  و  $f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . هم‌چنین تابع  $f$  را تابع هدف مسئله و  $x$  را متغیر تصمیم‌گیریم. فرض کنید می‌خواهیم از روش PSO برای حل مسئله (۹) استفاده کنید. در این روش ابتدا تعدادی از نقاط فضای شدنی مسئله‌ی بهینه‌سازی به عنوان ذرات اولیه در نظر گرفته می‌شوند؛ سپس با استفاده از الگوی این روش در هر مرحله ذرات بهینه می‌شوند. این کار تا زمانی که یکی از شرط‌های توقف محقق گردد ادامه خواهد داشت. الگوی پرواز هر ذره با توجه به موقعیت ذرات دیگر تعیین می‌شود. فرض کنید  $x_i(t)$  بیانگر ذره  $i$  ام در مرحله  $t$  ام باشد. در این صورت نحوه به دست آوردن این ذره برای مرحله بعدی به صورت می‌باشد [۱۶]:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

می‌باشد [۱۶]، که در آن  $x_i(0) \in [x_{\min}, x_{\max}]$  است و  $v_i(t+1)$  را بردار جابجایی<sup>۳</sup> در مرحله  $t+1$  می‌نامند. با توجه به بردار جابجایی دو نوع الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات زیر پدید

- 
- 1- Kennedy
  - 2- Eberhart
  - 3- Velocity Vector

آمده است [۱۸ و ۱۹]:

(۱) روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری<sup>۱</sup>،

(۲) روش ازدحام ذرات بهینه‌ی موضعی<sup>۲</sup>.

در ادامه به توضیح روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است، می‌پردازیم.

### ۳-۱-۱- روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری (gbest)

در روش ازدحام ذرات بهینه‌ی سراسری، همسایگی برای هر ذره شامل تمام ذرات مسئله می‌باشد. در واقع در این روش از اطلاعات اجتماعی بهترین موقعیت یافت شده در بین تمام ذرات ( $\hat{y}(t)$ ) استفاده می‌شود. بردار جابجایی در این روش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t)[\hat{y}_{ij}(t) - x_{ij}(t)] \quad (10)$$

که در آن  $v_{ij}(t)$  بردار جابجایی مؤلفه‌ی  $i$  ام ذره  $j$  ام در مرحله  $t$  ام می‌باشد و  $j$  می‌تواند یک عدد صحیح بین ۱ تا  $n_x$  باشد که در آن  $n_x$  بعد مسئله‌ی بهینه‌سازی است. همچنین  $x_{ij}(t)$  مؤلفه‌ی  $i$  ام ذره  $j$  ام در مرحله  $t$  ام می‌باشد. پارامترها  $c_1$  و  $c_2$  ثابت‌های مثبتی هستند که میزان سهمیم بودن مؤلفه‌های شخصی و اجتماعی را به ترتیب مشخص می‌کند.  $r_{1j}$  و  $r_{2j}$  اعداد تصادفی دلخواهی در بازه‌ی [۰,۱] هستند.  $y_{ij}(t)$  بهترین موقعیتی است که  $x_{ij}$  از اولین مرحله تا مرحله‌ی  $t$  تجربه کرده است. منظور از بهترین موقعیت یعنی این که  $f(y_i)$  بهترین مقدار  $f(x_i)$  تا این مرحله بوده است و  $\hat{y}_{ij}(t)$  مؤلفه‌ی  $j$  ام موقعیت بهترین ذره از اولین مرحله تا مرحله‌ی  $t$  ام در بین تمام ذرات می‌باشد، یعنی  $f(\hat{y})$  بهترین مقدار تا این مرحله بوده است. جهت دریافت اطلاعات بیشتر در خصوص روش ازدحام ذرات به [۱۹-۲۲] مراجعه فرمایید.

### ۳-۲- روش رونوشت مستقیم ذوزنقه

یک دسته از روش‌های عددی مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه، روش‌های رونوشت مستقیم می‌باشد که خود به دو دسته موضعی و سراسری تبدیل می‌شوند. در روش رونوشت سراسری همانند روش‌های شبه طیفی توابع کنترل و حالت با یک تقریب سراسری در کل دامنه مسئله

1- Global Best PSO

2- Local Best PSO

تقریب می شوند؛ اما در روش های رونوشت موضعی مانند روش اویلر، ذوزنقه و هرمیت سیمپسون توابع کنترل و حالت به صورت موضعی و محلی تقریب زده می شوند. این روش ها به طور مفصل در مرجع [۲۳] بیان شده است. ما در اینجا روش رونوشت موضعی ذوزنقه را توضیح می دهیم و در ادامه از آن برای حل یک دسته از مسائل کنترل بهینه ترکیبی استفاده می کنیم.

برای توضیح این روش مسئله کنترل بهینه زیر را که در بازه  $[0, 1]$  می باشد و هزینه آن به فرم مایر است، در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \phi(x(1)) \\ \text{s.to } \dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, 1]; \\ C(x(t), u(t), t) &\leq 0; \\ \psi(x(0), x(1)) &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

در این روش ابتدا بازه مسئله به صورت زیر به  $n$  قسمت مساوی تقسیم می شود:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

$$t_i = (i-1)h, \quad h = \frac{1}{n-1}.$$

حال در روش ذوزنقه معادلات دینامیکی با معادله تکرار روش ذوزنقه به دستگاه معادلات جبری تبدیل می شود؛ یعنی معادلات دینامیکی  $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$  در نقاط گره ای  $t_i, i = 1, 2, \dots, n$  به صورت

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f(x_i, u_i, t_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1}, t_{i+1}))$$

گسسته می شوند، که در آن  $x_i = x(t_i)$  می باشد. همچنین قیدهای مسیری  $C(x(t), u(t), t) \leq 0$  را در نقاط گره ای به صورت

$$C(x_i, u_i, t_i) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

گسسته سازی می کنیم. شرایط مرزی مسئله نیز به صورت زیر بیان می شوند:

$$\psi(x(t_0), x(t_n)) = 0.$$

بنابراین مسئله کنترل بهینه (۱۲) به صورت مسئله بهینه سازی زیر رو نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \phi(x(t_n)) \\ \text{s.to: } x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{\gamma} (f(x_i, u_i, t_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1}, t_{i+1})); \quad (11) \\ C(x_i, u_i, t_i) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \psi(x(t_i), x(t_n)) &= 0. \end{aligned}$$

#### ۴- حل مسائل کنترل بهینه سوییچ خودگردان با دنباله مد مجهول

در این بخش از مقاله به ارائه یک روش برای حل مسائل کنترل بهینه سوییچ خودگردان با دنباله مد مجهول می‌پردازیم و در بخش پایانی، نتایج عددی برای حل یک نمونه از این مسائل ارائه می‌شود.

#### ۴-۱- ارائه یک روش برای یافتن دنباله مد مسئله با استفاده از الگوریتم PSO

در این روش که مبتنی بر گسسته‌سازی تابع کنترل است بازه‌ی زمانی  $[t_i, t_f]$  را به  $n-1$  زیر بازه به صورت

$$t_i = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_f.$$

تقسیم می‌کنیم. بنابراین مقدار  $u$  در نقاط مذکور مجهول می‌باشد؛ به عبارت دیگر اگر نقاط گره‌ی باشند آنگاه بردار  $[u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n)]$  مجهول می‌باشد که این بردار مجهول را با در نظر گرفتن  $z_i = u(t_i)$  به صورت  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  نشان می‌دهیم؛ بنابراین برای کنترل می‌توان نماد مناسب‌تر  $u(t, z) = u(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$  را به کار برد. با این عمل مقدمات تبدیل مسئله کنترل بهینه سوییچ خودگردان به یک مسئله بهینه‌سازی فراهم می‌گردد. حال ادامه روش که محاسبه بردار پارامترهای مجهول  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  می‌باشد را در دو گام الف و ب توضیح می‌دهیم.

**گام الف:** در این گام با قرار دادن  $u(t, z)$  در معادلات حالت مسئله کنترل بهینه و سپس حل آن، متغیر حالت متناظر با آن کنترل را به دست می‌آوریم. البته باید توجه شود که در مسائل سوییچ خودگردان در هر ناحیه یک دسته معادلات دینامیکی برقرار است؛ به همین دلیل ابتدا باید مشخص شود که کدام زیرسیستم فعال است. در واقع در این قسمت از روش هر بار که  $u_k(t, z)$  و  $x_k$  داده می‌شود و می‌خواهیم  $x_{k+1}$  را بیابیم، ابتدا مشخص می‌کنیم که  $x_k$  در چه ناحیه‌ای قرار دارد و با توجه به ناحیه، وضعیت را انتخاب می‌کنیم و آنگاه با توجه به آن وضعیت  $x_{k+1}$  را از روی  $x_k$  استخراج می‌کنیم.

گام ب: در این گام برای حل مسئله بهینه‌سازی به دست آمده از گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه، از الگوریتم PSO استفاده می‌کنیم. در زیر نحوه به کارگیری این الگوریتم را توضیح می‌دهیم.

از آن جاکه پارامترهای مجهول به صورت  $\{u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n)\}$  می‌باشد، با در نظر گرفتن  $g_i = \{u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n)\}$  به عنوان موقعیت یک ذره، از الگوریتم PSO برای به دست آوردن این مجهولات استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا تعداد  $n_{pop}$  ذره (متغیر کنترل) که هر کدام با فرض  $u(t_j) = g^j$  به صورت  $g_i = (g_i^1, g_i^2, \dots, g_i^n)$  می‌باشد، به عنوان جواب مسئله در نظر می‌گیریم که در آن  $g_i$  ذره‌ی  $i$ ام در جمعیت ذرات می‌باشد را در شروع کار نحوه انتخاب کردن متغیرهای کنترل به صورت تصادفی و در فضای قابل قبول صورت می‌گیرد. اگر فرض کنیم در مرحله‌ی (تکرار)  $k$ ام قرار داریم. جمعیت در مرحله  $k$ ام به صورت

$$p(k) = \{g_1(k), g_2(k), \dots, g_{pop}(k)\}. \quad (12)$$

می‌باشد. برای هر کدام از این ذرات که معادل متغیر کنترل برای مسئله می‌باشند، با توجه به گام الف، متغیر حالت متناظر را به دست آورده و متغیر به دست آمده در تکرار  $k$ ام برای ذره  $g_i$  را با  $x_i(k)$  نشان می‌دهیم. حال تابع برازندگی را به صورت تابعی هزینه همراه با جریمه‌ی شرایط مرزی انتهایی به فرم

$$f(g_i) = J(g_i, x_i, t) + M(x_i(t_f) - x_f) \quad (13)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن  $M$  یک عدد حقیقی بزرگ به عنوان جریمه است. برازندگی هر کدام از  $g_i$  ها توسط  $f(g_i)$  محاسبه می‌شود. بدین ترتیب بهترین ذره شخصی  $g_i^{best}$  و بهترین ذره جمعی  $g^{best}$  به دست می‌آید. با توجه به این ذرات، بردار جابجایی اشاره شده در الگوریتم PSO که در بخش سوم برای هر ذره‌ی  $g_i(k)$  به دست می‌آید را با  $v_i(k)$  نشان می‌دهیم. حال طبق روابط گفته شده در زیر بخش ۳-۱-۱ داریم:

$$g_i(k+1) = g_i(k) + v_i(k).$$

بدین ترتیب یک جمعیت جدید از ذرات تشکیل می‌شود که به صورت

$$p(k+1) = \{g_1(k+1), g_2(k+1), \dots, g_{n_{pop}}(k+1)\}$$

است. سپس برازندگی هر یک از ذرات جمعیت جدید را به دست می‌آوریم. اگر جمعیت جدید شرایط توقف را ایجاد کرد که الگوریتم پایان می‌پذیرد؛ در غیر این صورت موقعیت جدید ذرات

را به دست می‌آوریم و الگوریتم را ادامه می‌دهیم. این چرخه تا زمانی که شرایط توقف محقق نگردد ادامه پیدا می‌کند. در این مرحله با استفاده از روش PSO دنباله مد و تعداد سویچ مسئله به دست می‌آید و مسئله به یک مسئله با دنباله مد معلوم تبدیل می‌شود؛ در ادامه رویکردی مستقیم برای حل این مسئله با استفاده از روش رونوشت مستقیم ارائه می‌شود.

#### ۴-۲- روش رونوشت موضعی برای حل مسئله کنترل بهینه ترکیبی با دنباله مد معلوم

با معلوم بودن دنباله مد مسئله، حل یک مسئله کنترل بهینه ترکیبی با سویچ خودگردان و دنباله مد معلوم در دست می‌باشد. برای حل این مسئله ابتدا آن را به فرم مسئله (۱۰) مدل می‌کنیم. برای تبدیل مسئله سویچ خودگردان با دنباله معلوم، با فرض این که مسئله‌داری  $k$  سویچ و زمان‌های سویچ  $t_1, t_2, \dots, t_k$  باشد، ابتدا تمام بازه‌های  $[t_i, t_{i+1}]$  را با استفاده از تبدیل‌های

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

به بازه  $[0, 1]$  انتقال می‌دهیم. با این انتقال و در نظر گرفتن  $x_{ij}$  به‌عنوان مؤلفه‌ی  $j$ ام متغیر حالت در بازه‌ی  $i$ ام، معادلات دینامیکی مسئله را به‌صورت

$$x_{ij} = (t_i - t_{i+1}) f_{qi}(x_i, u_i, \tau), \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k; \\ j = 1, 2, \dots, N; \\ \tau \in [0, 1]; \\ x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}] \end{cases}$$

بازنویسی می‌کنیم. با استفاده از این روند مسئله کنترل بهینه ترکیبی با سویچ خودگردان و دنباله مد معلوم به یک مسئله کنترل بهینه معمولی در بازه  $[0, 1]$  تبدیل می‌شود که برای حل آن از روش رونوشت موضعی ذوزنقه که در بخش پیشین بیان شده است، استفاده می‌کنیم.

#### ۵- پیاده‌سازی

در این بخش با ارائه یک مثال، کارایی رویکرد ارائه‌شده برای حل مسائل کنترل بهینه با سویچ خودگردان و دنباله مد مجهول را نشان می‌دهیم. کلیه پیاده‌سازی‌ها در محیط Matlab انجام شده است. از دستور ode45 برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه استفاده شده است. همچنین بهینه‌سازی در روش رونوشت مستقیم با استفاده از نسخه ۲،۱۳

(a2013R) جعبه ابزار opti و دستور solve انجام شده است. در این مثال ناحیه به چهار حالت تقسیم و در هر یک از نواحی وضعیت سیستم به صورت خطی زیر اعمال می گردد [۲۴ و ۲۵]:

$$\dot{x} = A_q x(t) + B u_q$$

جای که:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & -5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و حالت های متفاوت از انتخاب متناظر متغیر  $q \in Q = \{1, 2, 3, 4\}$  ناشی می شوند. سیستم باید از نقطه اولیه  $x_0 = (-8, -6)$  به نقطه نهایی  $x_e = (0, 0)$  هدایت شود به طوری که هزینه حرکت کمینه شود. برای هر ناحیه  $q$ ، تابع هزینه به فرم  $\frac{1}{4}(x^T x + u_q^2)$  است و متغیر کنترل در تمام نواحی گسسته محدود به  $-10 \leq u_q(t) \leq 10$  می باشد. همچنین نواحی به صورت زیر مشخص شده است:

$$h_1 = \begin{cases} x_1 + 5 \leq 0 \\ -x_1 - 6 \leq 0 \\ -x_1 - 10 \leq 0 \end{cases}, h_2 = \begin{cases} x_1 + 2 \leq 0 \\ -x_2 - 5 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_2 - 2 \leq 0 \\ x_1 - 10 \leq 0 \end{cases}, h_3 = \begin{cases} -x_1 - 5 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_2 + 2 \leq 0 \\ -x_2 - 6 \leq 0 \\ x_1 - 5 \leq 0 \end{cases}, h_4 = \begin{cases} x_1 - 5 \leq 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \\ -x_1 - 2 \leq 0 \\ -x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

سوییچ ها نیز با توجه به مرز مشترک نواحی (منیفلدهای سویچ) رخ می دهند که در این مثال به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= m_{2,1} = x_2 + 5 = 0; \\ m_{2,3} &= m_{3,2} = x_1 - x_2 = 0; \\ m_{1,3} &= m_{3,1} = x_1 + 5 = 0; \\ m_{2,4} &= m_{4,2} = x_2 + 2 = 0; \\ m_{3,4} &= m_{4,3} = x_1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

قابل ذکر است که در حل این مسئله دنباله مد و حتی تعداد سویچ ها، مجهول در نظر گرفته شده اند. در این مثال محدودیت کنترل به صورت  $|u| < 10$  می باشد به عبارتی  $u_{\min} = -10$  و  $u_{\max} = 10$  می باشند. همچنین شرایط مرزی اولیه و مرزی نهایی به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{x}(\circ) := \begin{bmatrix} x_1(\circ) \\ x_2(\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t_f) := \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

برای حل این مسئله ابتدا با در نظر گرفتن  $n_{pop} = 20$ ،  $n = 10$  و تابع برازندگی به صورت:

$$f(u) = J + 100 \left( \sqrt{(x_{1,u}(t_f) - \circ)^2 + (x_{2,u}(t_f) - \circ)^2} \right)$$

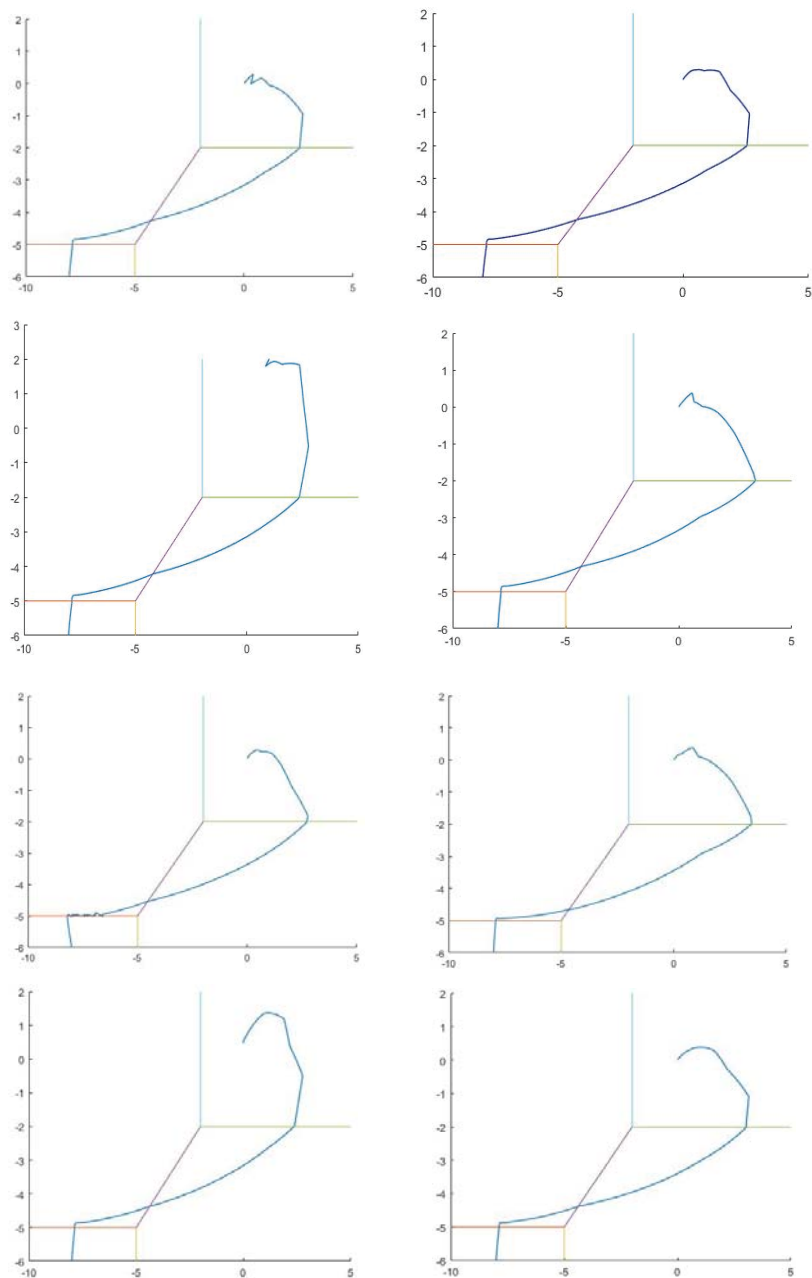
از الگوریتم PSO، به نحوی که در بخش ۴-۱ گفته شد، استفاده کرده ایم. در تابع برازندگی فوق،  $J$  همان تابعی هزینه مسئله است. همچنین شرایط توقف الگوریتم PSO برای حل این مسئله به صورت حداکثر تکرار برابر با ۳۰ لحاظ شده است. پارامترهای PSO استفاده شده همان‌هایی هستند که در مرجع [۱۶]. ذکر شده‌اند و اندازه جمعیت اولیه در این روش، ۲۵ در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از ۱۰ بار پیاده‌سازی الگوریتم PSO که در آن ۸ مورد دارای دنباله مد یکسان است، در جدول ۱ آورده شده است.

**جدول (۱):** نتایج حاصل از استفاده از الگوریتم PSO برای

یافتن ساختار و دنباله مد مسئله در ۱۰ مرتبه پیاده‌سازی

دنباله مد به دست آمده	$J_{opt}$ (مقدار بهین تابع هدف)	
(۱,۲,۳,۴)	۲۴/۲۴	۱
(۱,۲,۳,۴)	۲۷/۲۲	۲
(۱,۲,۳,۴)	۲۲/۹۰	۳
(۱,۲,۳,۴)	۲۱/۸۳	۴
(۱,۲,۳,۴)	۲۳/۳۱	۵
(۱,۳,۴)	۲۸/۶۳	۶
(۱,۲,۳,۴)	۲۱/۹۲	۷
(۱,۳,۴)	۲۶/۴۵	۸
(۱,۲,۳,۴)	۲۲/۱۵	۹
(۱,۲,۳,۴)	۲۱/۸۰	۱۰

همچنین نتایج حاصل از پیاده‌سازی‌ها (شکل ۳) نشان می‌دهد دنباله مد مسئله به صورت (۱,۲,۳,۴) است.



شکل (۳): نتایج حاصل از استفاده از الگوریتم PSO برای یافتن ساختار و دنباله مد مسئله

با تعیین دنباله مد مسئله از مرحله‌ی قبل، واضح است که مسئله با دنباله‌ی مد (۱,۲,۳,۴)، دارای سه سویچ می‌باشد، با فرض این‌که زمان‌های سویچ مسئله  $\{t_1, t_2, t_3\}$  باشند، این زمان‌ها می‌بایست به‌عنوان مجهولات مسئله محاسبه شوند. برای حل مسئله در این مرحله از روش رونوشت استفاده می‌کنیم؛ برای این کار ابتدا بازه‌های  $[0, t_1]$ ،  $[t_1, t_2]$ ،  $[t_2, t_3]$  و  $[t_3, 2]$  را به بازه  $[0, 1]$  انتقال می‌دهیم. با این انتقال و در نظر گرفتن  $x_{ij}$  به‌عنوان مؤلفه‌ی  $j$ ام متغیر حالت در بازه‌ی  $i$ ام مسئله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\min J = \int_0^1 \frac{1}{\tau} (t_1(x_{11}^\tau + x_{12}^\tau + u_1^\tau) + (t_2 - t_1)(x_{21}^\tau + x_{22}^\tau + u_2^\tau) + (t_3 - t_2)(x_{31}^\tau + x_{32}^\tau + u_3^\tau) + (2 - t_3)(x_{41}^\tau + x_{42}^\tau + u_4^\tau)) d\tau$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11}(\tau) &= t_1(-x_{11} + 2x_{21} + u_1); \\ \dot{x}_{12}(\tau) &= t_1(-2x_{11} - 2x_{21} + u_1); \\ \dot{x}_{21}(\tau) &= (t_2 - t_1)(-x_{21} - 2x_{32} + u_2); \\ \dot{x}_{22}(\tau) &= (t_2 - t_1)(x_{21} - \delta / \Delta x_{32} + u_2); \\ \dot{x}_{31}(\tau) &= (t_3 - t_2)(-\delta / \Delta x_{31} - \Delta x_{32} + u_3); \\ \dot{x}_{32}(\tau) &= (t_3 - t_2)(x_{31} - \delta / \Delta x_{32} + u_3); \\ \dot{x}_{41}(\tau) &= (2 - t_3)(-x_{41} + u_4); \\ \dot{x}_{42}(\tau) &= (2 - t_3)(2x_{41} - x_{42} + u_4); \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} - 1 \leq 0; \\ x_{11} + \delta \leq 0; \\ -x_{12} + \delta \leq 0; \\ -x_{22} + \delta \leq 0; \\ -x_{32} - \delta \leq 0; \\ x_{21} - x_{32} \leq 0; \\ x_{21} + 2 \leq 0; \\ x_{32} - 2 \leq 0; \\ -x_{41} - 1 \leq 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -x_{21} - \delta \leq 0; \\ -x_{21} - x_{32} \leq 0; \\ x_{32} + 2 \leq 0; \\ -x_{32} - \delta \leq 0; \\ x_{41} - \delta \leq 0; \\ x_{41} - \delta \leq 0; \\ x_{42} - 2 \leq 0; \\ -x_{42} - 2 \leq 0; \\ -x_{41} - 2 \leq 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_{21}(1) + \delta = 0; \\ x_{21}(1) - x_{32}(1) = 0; \\ x_{32}(1) + 2 = 0; \\ x_{41}(1) = x_{42}(1) = 0; \\ x_{22}(1) = -\delta; \\ x_{21}(1) = -\delta; \\ x_{21}(0) = x_{32}(0); \\ x_{31}(0) = x_{32}(0); \\ x_{32}(0) = x_{41}(0); \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_{21}(0) = x_{41}(0); \\ x_{32}(0) = x_{42}(0); \\ -x_{32} - \delta \leq 0; \\ -1 \leq u_1(\tau) \leq 1; \\ -1 \leq u_2(\tau) \leq 1; \\ -1 \leq u_3(\tau) \leq 1. \end{array} \right.$$

همچنین تابع هدف مسئله را با معرفی متغیر  $x_5$  به‌صورت:

$$x_{\delta} = \frac{1}{\gamma} (t_1(x_{11}^x + x_{1r}^x + u_1^x) + (t_r - t_1)(x_{r1}^x + x_{rr}^x + u_r^x) + (t_r - t_r)(x_{r1}^x + x_{rr}^x + u_r^x) + (2 - t_r)(x_{r1}^x + x_{rr}^x + u_r^x))$$

را با شرط اولیه  $x_{\delta}(0) = 0$  می توان به فرم مایر  $J = x_{\delta}(1)$  نوشت که این امر از محاسبه انتگرال در حل مسئله جلوگیری کرده و به لحاظ محاسباتی به صرفه می باشد. توجه شود که زمان های  $t_1$ ،  $t_r$  و  $t_r$  جز پارامترهای مجهول در نظر گرفته می شوند. با پیاده سازی روش دوزنقه بیان شده در بخش ۳-۲ به ازای مقادیر مختلف برای تعداد نقاط گسسته سازی  $n$ ، نتایج جدول زیر برای زمان های  $t_1$ ،  $t_r$  و  $t_r$  و تابع هدف حاصل شده است.

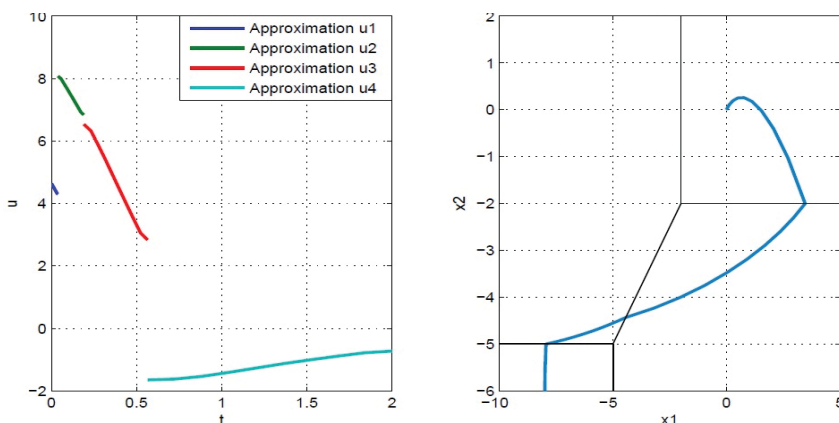
جدول (۲): جواب های حاصل از روش رونوشت دوزنقه به ازای  $n = 10, 20, 50$

$J_{opt}$	$t_{r_{opt}}$	$t_{r_{opt}}$	$t_{1_{opt}}$	$n$
۲۱/۷۱۹۶	۰/۵۶۷۲	۰/۳۸۵۶	۰/۱۹۰۶	۱۰
۲۱/۷۰۳۶	۰/۵۶۷۲	۰/۳۸۵۶	۰/۱۹۰۶	۲۰
۲۱/۶۹۵۸	۰/۵۶۷۲	۰/۳۸۵۶	۰/۱۹۰۶	۵۰

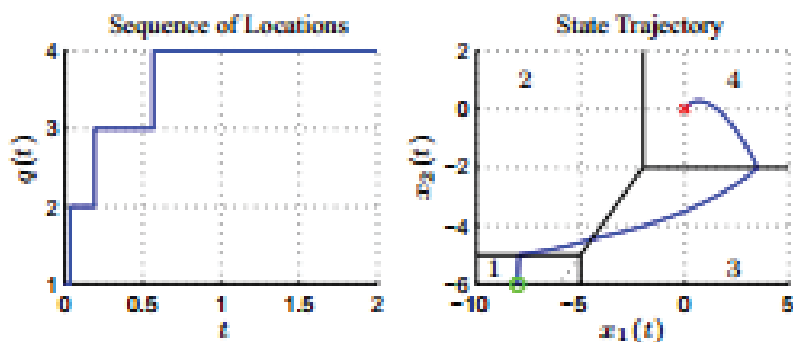
در ادامه نمودار جواب های تقریبی توابع حالت  $x_1$  و  $x_r$  و تابع کنترل  $u(t)$  به دست آمده از روش دوزنقه به ازای  $n = 20$  در شکل ۴ گزارش شده است. شکل ۵، نتایج به دست آمده برای این مثال در مرجع [۲۵] را نمایش می دهد که مقایسه ی نتایج به دست آمده، نمایانگر منطبق بودن متغیرهای حالت و زمان مسئله در دو روش است. لازم به ذکر است که در مرجع [۲۵] از استخراج شرایط لازم بهینگی و یک جستجوی درختی استفاده شده است که از معایب آن می توان به پیچیدگی استخراج شرایط لازم بهینگی و شرط حداکثر تعداد مجاز برای سویچ اشاره کرد (در این مرجع حداکثر تعداد سویچ مجاز ۵ در نظر گرفته شده است).

نتایج حاصل از پیاده سازی نشان می دهد که روش ارائه شده برای حل مسائل کنترل بهینه ترکیبی با سویچ خودگردان و دنباله مد مجهول موفق عمل می کند. همچنین از مزیت های این روش می توان به عدم نیاز به استخراج شرایط لازم بهینگی که برای مسائل سویچ خودگردان مشکل است، اشاره کرد. همچنین تنک بودن  $NLP^2$  حاصل از مرحله دوم روش باعث می شود [۲۳] که بتوان آن را با سرعت بالا حل کرد و این امر برای مسائل با تعداد نقاط سویچ زیاد که برای دقت کافی به تعداد نقاط گره ی بیشتری نیاز دارند، مفید می باشد.

- 1- Sparse
- 2- Nonlinear Programming



شکل (۴): نمودار جواب‌های تقریبی برای توابع حالت و کنترل به‌دست‌آمده از پیاده‌سازی روش ذوزنقه به ازای  $n = 20$



شکل (۵): نتایج به‌دست‌آمده در مرجع [۲۵]

نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که روش ارائه‌شده برای حل مسائل کنترل بهینه ترکیبی با سویچ خودگردان و دنباله مد مجهول موفق عمل می‌کند. همچنین از مزیت‌های این روش می‌توان به عدم نیاز به استخراج شرایط لازم بهینه‌گی که برای مسائل سویچ خودگردان مشکل است، اشاره کرد. همچنین تنگ بودن  $NLP^2$  حاصل از مرحله‌ی دوم روش باعث می‌

- 1- Sparse
- 2- Nonlinear Programming

شود [۲۳] که بتوان آن را با سرعت بالا حل کرد و این امر برای مسائل با تعداد نقاط سویچ زیاد که برای دقت کافی به تعداد نقاط گرهی بیشتری نیاز دارند، مفید می‌باشد.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای حل مسائل کنترل بهینه ترکیبی با سویچ خودگردان و دنباله مد مجهول ارائه شده است که در آن از الگوریتم PSO جهت تعیین ساختار، دنباله مد و تعداد سویچ مسئله استفاده شده است و سپس با مدل کردن مسئله سویچ خودگردان با دنباله مد معلوم به فرم یک مسئله کنترل بهینه معمولی، به حل آن با استفاده از یک رویکرد مستقیم پرداخته‌ایم. نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که الگوریتم PSO برای حل مسئله کنترل بهینه ترکیبی سویچ خودگردان با دنباله مد نامشخص موفق عمل می‌کند. نقطه‌ی قوت این روش در عدم نیاز به شناخت قبلی نسبت به ساختار جواب مسئله و تعداد سویچ‌ها و دنباله مد می‌باشد.

#### منابع

- [1] Witsenhausen, H. (1966). A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **11**, 161-167.
- [2] Liberzon, D. (2012). Switching in systems and control. *Springer Science & Business Media*.
- [3] Eich-Soellner, E. and Führer, C. (1998). Numerical methods in multibody dynamics, *Stuttgart: Teubner*.
- [4] Böhme, T. J. and Frank, B. (2017). Hybrid systems and hybrid optimal control. In *Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles* Springer, Cham, 79-115.
- [5] Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2014). Hybrid dynamical systems: An introduction to control and verification. *Foundations and Trends in Systems and Control*, **1**, 1-172
- [6] Wu, X., Zhang, K. and Sun, C. (2015). Constrained optimal control of switched systems and its application. *Optimization*, **64**, 539-557.
- [7] Liu, X. and Stechliniski, P. (2017). Hybrid and Switched Systems. In *Infectious Disease Modeling*, Springer, Cham, 21-39.
- [8] Hamann, P. and Mehrmann, V. (2008). Numerical solution of hybrid systems of differential-algebraic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 693-705.

- [9] Yu, M., Wang, L., Chu, T. and Xie, G. (2004, December). Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach. *In Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, **4**, 3539-3544.
- [10] Kröger, T. (2010). Hybrid switched-system control for robotic systems. *In On-Line Trajectory Generation in Robotic Systems, Springer, Berlin, Heidelberg*, 105-135.
- [11] Filippov, A. F. (1960). Differential equations with discontinuous right-hand side. *Matematicheskii sbornik*, **93**, 99-128.
- [12] Xu, X. and Antsaklis, P. J. (2004). Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants. *IEEE transactions on automatic control*, **49**(1), 2-16.
- [13] Kirk, D. E. (2012). Optimal control theory: an introduction. *Courier Corporation*.
- [14] Flaßkamp, K. Murphey, T. and Ober-Blöbaum, S. (2012, December). Switching time optimization in discretized hybrid dynamical systems. *In Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on IEEE*, 707-712.
- [15] Passenberg, B. Caines, P. E. Sobotka, M. Stursberg, O. and Buss, M. (2010, December). The minimum principle for hybrid systems with partitioned state space and unspecified discrete state sequence. *In Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on, IEEE*, 6666-6673.
- [16] Kennedy, J. (2011). Particle swarm optimization. *In Encyclopedia of machine learning, Springer US*, 760-766.
- [17] Clerc, M. and Kennedy, J. (2002). The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, **6**, 58-73
- [18] Borrelli, F. (2003). Constrained optimal control of linear and hybrid systems, **290**. *Springer*.
- [19] Eberhart, R. and Kennedy, J. (1995, October). A new optimizer using particle swarm theory. *In Micro Machine and Human Science, Proceedings of the Sixth International Symposium on*, 39-43, *IEEE*
- [20] Krink, T. Vesterström, J.S. and Riget, J. (2002). Particle swarm optimisation with spatial particle extension. *In Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on*, **2**, 1474-1479. *IEEE*.

- [21] Eberhart, R. Simpson, P. and Dobbins, R. (1996). Computational intelligence PC tools. *Academic Press Professional, Inc.*
- [22] Fulcher, J. (2008). Computational intelligence: an introduction. *In Computational intelligence: a Compendium, Springer, Berlin, Heidelberg, 3-78.*
- [23] Betts J, T. (2010), Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming, **19**, *Siam.*
- [24] Passenberg, B. (2012). Theory and algorithms for indirect methods in optimal control of hybrid systems. *PhD thesis, Technical University of Munich.*
- [25] Passenberg, B. and Stursberg, O. (2019). Graph search for optimizing the discrete location sequence in hybrid optimal control. *IFAC Proceedings Volumes, 42*, 304-309.

## Modeling and Solving Problems of Optimal Control of Hybrid Systems with Autonomous Switches Using Particle Swarm Optimization and Direct Transcription Methods

Zeynab Dalvand\*, Mostafa Shamsi\*\*, Masoud Hajarian\*

\*Department of Applied and Industrial Mathematics, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

\*\*Department of Mathematics, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

### Abstract

In this paper, it is focused on a specific category of hybrid optimal control problems with autonomous systems. Because of existence of continuous and discrete dynamic, the numerical solutions of hybrid optimal control are not simple. The numerical direct and indirect methods presented for solving optimal control of hybrid systems have drawbacks due to sensitivity to initial guess and the inability of finding a global minimum solution. Meta-heuristic methods have been proposed. In this method, Meta-heuristic methods (e.g. using PSO) is used to determine the mode sequence, and by the attention to the prescribed the mode sequence, a problem with a determinate mode sequence is obtained, and then the switching times, the optimal value of the target function and the state and control are estimated by using the direct approach. Actually, using the proposed model, we will eliminate basic challenges of solving optimal control of hybrid autonomous systems problems, in which the number of switches and mood sequence are unknown. Finally, numerical results for solving an example presented.

**Keywords:** Optimal control, Hybrid system, Autonomous switch, Heuristic methods, Particle Swarm Algorithm, Switch points, Mode sequence, Mayer form of objective function.

**Subject Classification (2010):** 49J15, 78M32.